

数学演習第一（演習第4回）【解答例】

線形：行列の基本変形, 簡約行列, 行列の階数 (2026 年 5 月 27 日実施)

演習問題

- 1 (1) 第 1 行の主成分が 1 でないので (ii) に反する. また, 第 2 行の主成分が第 1 行の主成分より左にあるので

$$(iii) \text{ に反する. } \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1) \times \textcircled{1}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (2) 第 1 行は零ベクトルであるが, 第 2 行は非零ベクトルであるため (i) に反する. また, 第 2 行の主成分が 1 でないので (ii) に反する. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2} \times \textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

- (3) 第 2 行の主成分が第 2 列に, 第 3 行の主成分が第 3 列にあるが, 第 2 列, 第 3 列には他にも 0 でない成分があるため (iv) に反する.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textcircled{1} - 2 \times \textcircled{3}]{\textcircled{1} - 3 \times \textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (4) 第 1 行は零ベクトルであるが, 第 2 行は非零ベクトルであるため (i) に反する. また, 第 3 行の主成分が 1 でないので (ii) に反する. さらに, 第 3 行の主成分が第 2 行の主成分より左にあるので (iii) に反する. 最後に, 第 2 行の主成分が第 3 列にあるが, 第 3 列には他にも 0 でない成分があるため (iv) に反する.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{3}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} + \textcircled{2}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} \times \textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2 $\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textcircled{3} - 7 \times \textcircled{1}]{\textcircled{2} - 4 \times \textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3} \times \textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textcircled{3} + 6 \times \textcircled{2}]{\textcircled{1} - 2 \times \textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

- 3 簡約行列の主成分を枠で囲んで示しておく. 簡約行列の主成分の個数がもとの行列の階数である. スペースの関係で省略するが, これ以外の手順もあり得る.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3} \times \textcircled{2}]{\frac{1}{2} \times \textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} - \textcircled{1}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$
階数は 1.

(2) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} - 1 \times \textcircled{2}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} - 2 \times \textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textcircled{1} - 2 \times \textcircled{2}]{\textcircled{3} + \textcircled{2}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 9 & 17 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$
階数は 2.

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 11 & 7 & 11 & 5 \\ 3 & 16 & 10 & 15 & -3 \\ 2 & 9 & 5 & 5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textcircled{4} - 2 \times \textcircled{1}]{\textcircled{2} - 2 \times \textcircled{1}, \textcircled{3} - 3 \times \textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textcircled{4} + \textcircled{2}]{\textcircled{1} - 5 \times \textcircled{2}, \textcircled{3} - \textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -11 & -25 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{8} \times \textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -11 & -25 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textcircled{2} - 5 \times \textcircled{3}]{\textcircled{1} + 25 \times \textcircled{3}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -2 & -11 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$ 階数は 3.

(4) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2} \times \textcircled{3}]{\frac{1}{2} \times \textcircled{1}, -\frac{1}{3} \times \textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textcircled{4} - 2 \times \textcircled{3}]{\textcircled{2} - \textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} \leftrightarrow \textcircled{3}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} \leftrightarrow \textcircled{4}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{階数は 3.}$$

注意: $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ の形の行列の簡約行列は, A, B の簡約行列を A', B' とおくと, $\begin{bmatrix} A' & O \\ O & B' \end{bmatrix}$ で行零ベクトルを下に集めたものになる.

4 (1) 基本行列は 3×3 行列. $A \xrightarrow{\textcircled{1}+3 \times \textcircled{2}} B$ なので, $B = P_{12}(3)A$. 従って, $M = P_{12}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) 基本行列は 4×4 行列. $A \xrightarrow{\textcircled{2} \leftrightarrow \textcircled{3}} \bullet \xrightarrow{(-2) \times \textcircled{4}} B$ なので, $B = P_4(-2)P_{23}A$. 従って,

$$M = P_4(-2)P_{23} = P_4(-2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

積を「計算」する必要はなく, $P_4(-2)$ に対応する行基本変形を施せばよいことに注意.

5 基本行列は 2×2 行列. **3** (1) の解説から, $B = P_{21}(-1)P_2(-1/3)P_1(1/2)A$. 従って,

$$M = P_{21}(-1)P_2(-1/3)P_1(1/2) = P_{21}(-1)P_2(-1/3) \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P_{21}(-1) \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

《補足》 $MA = B$ を満たす行列 M に一意性はなく, ある $a, b \in \mathbb{R}$ で $\begin{bmatrix} 1/2 + 3a & 2a \\ -1/2 + 3b & -1/3 + 2b \end{bmatrix}$ と表せる行列なら全て正解である. 実際, M' を $M'A = B$ を満たす一般の行列とすると $(M' - M)A = O$ より, $M' - M = \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}$ とおけば,

$$\begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s - 3t & 4s - 6t & -6s + 9t \\ 2u - 3v & 4u - 6v & -6u + 9v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって, $(s, t, u, v) = (3a, 2a, 3b, 2b)$ ($a, b \in \mathbb{R}$) となり,

$$M' = M + \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix} = M + \begin{bmatrix} 3a & 2a \\ 3b & 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 + 3a & 2a \\ -1/2 + 3b & -1/3 + 2b \end{bmatrix}.$$

6 階数が判った時点で計算を終了してよい (階数を求めるだけなら簡約行列まで変形する必要はない).

$$(1) \begin{bmatrix} a & a \\ a-1 & 1 \\ a-2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textcircled{1}-\textcircled{2}]{\textcircled{3}-\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & a-1 \\ a-1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1 \times \textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & a-1 \\ a-1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a-1 & 1 \\ 1 & a-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-(a-1) \times \textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -(a-2) \\ 0 & a-2 \end{bmatrix}$$

よって,

- $a \neq 2$ のとき階数は 2,
- $a = 2$ のとき階数は 1.

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textcircled{3}-a^2 \times \textcircled{1}]{\textcircled{2}-a \times \textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-(b+a) \times \textcircled{2}} B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) \end{bmatrix}.$$

- $a \neq b$ のとき, $b \neq c$ かつ $c \neq a$ ならば階数は 3, $b = c$ または $c = a$ ならば階数は 2 である.

- $a = b$ のとき, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-(c-a) \times \textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 従って, $c \neq a$ ならば階数は 2, $c = a$ ならば階数は 1 である.

以上をまとめて,

- a, b, c の全て異なれば階数は 3,
- いずれか二つが一致し, もう一つが異なるならば階数は 2,
- 全てが一致する ($a = b = c$) ならば階数は 1.

《補足》簡約行列は以下の通り.

- a, b, c がすべて異なるとき $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (階数は 3)

- $a \neq b = c$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b \neq a = c$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $a = b \neq c$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (階数は 2)

- $a = b = c$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (階数は 1)

- (3) • $a \neq 0$ のとき, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{(1/a) \times \textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & b/a \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} - c \times \textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & b/a \\ 0 & (ad - bc)/a \end{bmatrix}$ より,
 $ad - bc \neq 0$ なら階数は 2, $ad - bc = 0$ なら階数は 1 である.
- $c \neq 0$ のとき, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{3}} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \xrightarrow{(1/c) \times \textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & d/c \\ a & b \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} - a \times \textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & d/c \\ 0 & -(ad - bc)/c \end{bmatrix}$ より,
 $ad - bc \neq 0$ なら階数は 2, $ad - bc = 0$ なら階数は 1 である.
- $a = c = 0$ のとき, $b \neq 0$ なら $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \xrightarrow{(1/b) \times \textcircled{1}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & d \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} - d \times \textcircled{1}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 階数は 1.
- 同様に, $d \neq 0$ なら $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}} \begin{bmatrix} 0 & d \\ 0 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{(1/d) \times \textcircled{1}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} - b \times \textcircled{1}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 階数は 1.
- $a = b = c = d = 0$ のとき, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 階数は 0.

以上をまとめて,

- $ad - bc \neq 0$ ならば階数は 2,
- $ad - bc = 0$ かつ $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$ ならば階数は 1,
- $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$ ならば階数は 0.

《補足》簡約行列は以下の通り.

- $ad - bc \neq 0$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. (階数は 2)

- $ad - bc = 0$ かつ $a \neq 0$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $ad - bc = 0$ かつ $c \neq 0$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & d/c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. (階数は 1)
(注: $ad - bc = 0$ かつ $ac \neq 0$ ならば $b/a = d/c$.)

- $(a, c) = (0, 0)$ かつ $(b, d) \neq (0, 0)$ のとき $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. (階数は 1)

- $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$ のとき $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. (階数は 0)

レポート問題

(1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{①} \rightarrow \text{③}]{\text{①} \times (-2) \rightarrow \text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{②} \times (-1) \rightarrow \text{③}]{\text{②} \times (-2) \rightarrow \text{①}} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

よって、階数は 2. 主成分の存在する列は、第 1 列と第 2 列.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -3 & -2 \\ 3 & -6 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{①} \times (-3) \rightarrow \text{④}]{\begin{matrix} \text{①} \times (-2) \rightarrow \text{②} \\ \text{①} \rightarrow \text{③} \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{②} \times (-1) \rightarrow \text{①}, \text{③}, \text{④}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{③} \times (-\frac{1}{4})} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{③} \times 2 \rightarrow \text{①}]{\text{③} \times (-3) \rightarrow \text{②}} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

より、階数は 3. 主成分の存在する列は、第 1 列、第 3 列、第 5 列.

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 1 & a+1 \\ a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & a \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{①} \times (-1) \rightarrow \text{③}]{\text{①} \times (-a) \rightarrow \text{②}} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & a+1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 2-a-a^2 \\ 0 & 1-a & a-1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{②} \leftrightarrow \text{③}} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & a+1 \\ 0 & 1-a & a-1 & -1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 2-a-a^2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{②} \times \{-(1+a)\} \rightarrow \text{③}} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & a+1 \\ 0 & 1-a & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 & 3-a^2 \end{bmatrix} \cdots (*)$$

となる. $1-a, -a^2-a+2 = -(a-1)(a+2)$ がいずれも 0 でないとき、つまり、 $a \neq -2, 1$ のときは階数 3.

$a = 1$ のとき、(*) は $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となって階数 2.

$a = -2$ のとき、(*) は $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となって階数 3. 以上をまとめると

$a = 1$ のとき階数 2, $a \neq 1$ のとき階数 3.