

数学演習第一（演習第6回）【解答例】

線形：連立1次方程式（2026年6月10日実施）

【注】以下では、問題の〈例〉と同じく、連立1次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ に対して、拡大係数行列 $[A \ \mathbf{b}]$ の簡約行列 $[C \ \mathbf{d}]$ を拡大係数行列にもつ連立1次方程式 $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ を考えるとき、「 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ に簡約化される」「 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を簡約化して $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ を得る」といった言い方をした。

演習問題

1 (1) $[A \ \mathbf{b}]$ を簡約化して得られる連立1次方程式は

$$\begin{cases} \textcircled{x_1} - x_3 + 2x_5 = -3 \\ \textcircled{x_2} + 3x_3 - 2x_5 = 1 \\ \textcircled{x_4} - \frac{1}{2}x_5 = 4 \end{cases}$$

であり、主成分に対応する変数は x_1, x_2, x_4 .

(2) 主成分に関係しない変数を $x_3 = s, x_5 = t$ とおいて、求める解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + s - 2t \\ 1 - 3s + 2t \\ s \\ 4 + \frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$

【注】解の表示に分数が現れないように $x_5 = 2t$ とおいてもよい((3)の解答例はそのようにした).

(3) A の簡約行列は明らかに $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であり、同次連立1次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は

$$\begin{cases} \textcircled{x_1} - x_3 + 2x_5 = 0 \\ \textcircled{x_2} + 3x_3 - 2x_5 = 0 \\ \textcircled{x_4} - \frac{1}{2}x_5 = 0 \end{cases}$$

と簡約化される. よって, $x_3 = s, x_5 = 2t$ とおいて、求める解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s - 4t \\ -3s + 4t \\ s \\ t \\ 2t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$

【注】(2)の解答例と同じように $x_5 = t$ とおいて解を表現してもよい.

2 (i) (問題 8.2.9 (1)) 拡大係数行列を簡約化すると、

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 21 \\ 1 & 2 & 1 & 14 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 2 & 3 & 2 & 21 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{3} + \textcircled{1}]{\textcircled{2} - 2 \times \textcircled{1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 0 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \end{array} \right] \xrightarrow{-\textcircled{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow[\textcircled{3} - 3 \times \textcircled{2}]{\textcircled{1} - 2 \times \textcircled{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2} \times \textcircled{3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{1} - \textcircled{3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

よって、連立1次方程式は $\begin{cases} \textcircled{x} = 3 \\ \textcircled{y} = 7 \\ \textcircled{z} = -3 \end{cases}$ と簡約化されるので、求める解は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$.

(ii) (問題 8.2.10 (1)) 拡大係数行列を簡約化すると、

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & -9 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{3} - \textcircled{1}]{\textcircled{2} - 2 \times \textcircled{1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{3} - \textcircled{2}]{\textcircled{1} - \textcircled{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -8 & 35 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

よって、連立 1 次方程式は $\begin{cases} \textcircled{x_1} - 8x_3 = 35 \\ \textcircled{x_2} + 5x_3 = -22 \end{cases}$ と簡約化されるので、 $x_3 = t$ とおいて、求める解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 + 8t \\ -22 - 5t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ -22 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

(iii) (問題 8.2.10 (2)) 拡大係数行列を簡約化すると、 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 3 \\ -2 & 4 & 6 & -6 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{3}+\textcircled{1}]{\textcircled{2}+2\times\textcircled{1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. よっ

て、連立 1 次方程式は $\textcircled{x_1} - 2x_2 - 3x_3 = 3$ と簡約化されるので、 $x_2 = s, x_3 = t$ とおいて、求める解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 2s + 3t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$

(iv) (問題 8.2.10 (3)) 拡大係数行列を行基本変形して、

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{3}-\textcircled{1}]{\textcircled{2}-2\times\textcircled{1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -24 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{3}-\textcircled{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{array} \right].$$

よって、(係数行列の階数) = $2 \neq 3$ = (拡大係数行列の階数) となるので、解なし.

3 (1) 行列表示すれば $\begin{bmatrix} a+1 & a \\ 3 & a+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. よって、 $(a+1)(a+2) - 3a = a^2 + 2 > 0$ に注意して、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+1 & a \\ 3 & a+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2+2} \begin{bmatrix} a+2 & -a \\ -3 & a+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2+2} \begin{bmatrix} 3a+2 \\ -2a-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3a+2}{a^2+2} \\ -\frac{2a+5}{a^2+2} \end{bmatrix}.$$

どちらの形でもよい

(2) 拡大係数行列を簡約化して、

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 11 & -5 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 & 3 & 2 & a \\ 3 & 1 & 13 & 4 & a & a \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{1}-\textcircled{3}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -8 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 & 3 & 2 & a \\ 3 & 1 & 13 & 4 & a & a \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{4}-3\times\textcircled{1}]{\textcircled{3}-2\times\textcircled{1}}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -8 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 19 & 4 & a-2 \\ 0 & -2 & 4 & 28 & a+3 & a+4 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[\textcircled{4}+2\times\textcircled{2}]{\begin{smallmatrix} \textcircled{1}-\textcircled{2} \\ \textcircled{3}+\textcircled{2} \end{smallmatrix}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 5 & -9 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & a-5 & a+4 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{20}\times\textcircled{3}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 5 & -9 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{a-2}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 30 & a-5 & a+4 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{4}-30\times\textcircled{3}]{\begin{smallmatrix} \textcircled{1}+9\times\textcircled{3} \\ \textcircled{2}-\textcircled{3} \end{smallmatrix}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 & 3 & -6+\frac{9(a-2)}{20} \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -4 & 2-\frac{a-2}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{a-2}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 & a+4-\frac{30(a-2)}{20} \end{array} \right].$$

よって、 $a \neq 5$ ならば明らかに解なし. $a = 5$ ならば連立 1 次方程式は $\begin{cases} \textcircled{x_1} + 5x_3 = 3 \\ \textcircled{x_2} - 2x_3 = -4 \\ \textcircled{x_4} = 0 \end{cases}$ と簡約化

されるので、求める解は $x_3 = t$ とおいて

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 5t \\ -4 + 2t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

4 係数行列を簡約化して解を求める.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 9 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 5 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるから、連立 1 次方程

式は $\begin{cases} \textcircled{x} + 6z = 0 \\ \textcircled{y} + 3z = 0 \end{cases}$ と簡約化される. 解は $z = t$ とおいて

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6t \\ -3t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

これより、基本解は $\begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ で解の自由度は 1.

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ であるから, 連立 1 次方程式}$$

$$\text{式は } \begin{cases} \textcircled{x_1} + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \textcircled{x_2} - \frac{1}{2}x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \text{ と簡約化される. 解は } x_3 = 2s, x_4 = t \text{ において}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s-t \\ 2s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$

$$\text{これより, 基本解は } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ で, 解の自由度は 2.}$$

5 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ の 1 次関係式 $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 + c_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$ は c_1, c_2, c_3, c_4 を変数とする同次連立 1 次方程式

$$[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (*)$$

と見なせる. 係数行列を簡約化すると,

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4] &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & k \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & k+2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & k+2 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ が 1 次独立とは (*) の解が $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ に限られることであるから, 求める条件は $k \neq 1$.

(2) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ が 1 次従属とは (*) が自明でない解をもつことであるから, 求める条件は $k = 1$. このとき (*) の解は $c_1 = -t, c_2 = t, c_3 = -t, c_4 = t$ (t は任意定数). 特に, $t = -1$ と選び, 非自明な 1 次関係式 $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$ を得る.

6 (1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = b$ の拡大係数行列を簡約化して, $[a_1 \ a_2 \ a_3 \mid b] \rightarrow [1 \ \frac{a_2}{a_1} \ \frac{a_3}{a_1} \mid \frac{b}{a_1}]$. よって, $x_2 = a_1s, x_3 = a_1t$ において, 求める解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b}{a_1} - a_2s - a_3t \\ a_1s \\ a_1t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b}{a_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \overbrace{s \begin{bmatrix} -a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -a_3 \\ 0 \\ a_1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{a} \text{ と垂直}} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$

(2) $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ であるから, $A = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$ とおけば, $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ は $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と書ける. この連立 1 次方程式に対する拡大係数行列に行基本変形を施して,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -a_3 & a_2 & b_1 \\ a_3 & 0 & -a_1 & b_2 \\ -a_2 & a_1 & 0 & b_3 \end{array} \right] &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -\frac{a_2}{a_3} & -\frac{b_1}{a_3} \\ 1 & 0 & -\frac{a_1}{a_3} & \frac{b_2}{a_3} \\ -a_2 & a_1 & 0 & b_3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{a_1}{a_3} & \frac{b_2}{a_3} \\ 0 & 1 & -\frac{a_2}{a_3} & -\frac{b_1}{a_3} \\ -a_2 & a_1 & 0 & b_3 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{a_1}{a_3} & \frac{b_2}{a_3} \\ 0 & 1 & -\frac{a_2}{a_3} & -\frac{b_1}{a_3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{a_3} \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{a_1}{a_3} & \frac{b_2}{a_3} \\ 0 & 1 & -\frac{a_2}{a_3} & -\frac{b_1}{a_3} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

よって, $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつための条件は $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ であり, そのときの解は $x_3 = a_3t$ において,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_2}{a_3} + a_1t \\ -\frac{b_1}{a_3} + a_2t \\ a_3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_2}{a_3} \\ -\frac{b_1}{a_3} \\ 0 \end{bmatrix} + t \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a} \text{ に平行}} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

レポート問題

- (1) 主成分に対応しない変数は x_3 である．これを任意パラメータ s とおくと

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2s \\ -2-4s \\ s \\ 5 \end{bmatrix}. \quad \text{よって,} \quad \boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (s \text{ は任意定数})}.$$

- (2) (i) 係数行列を行基本変形して

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる．主成分に対応しない変数は x_2, x_4 であり，これを任意パラメータ s, t とおくと

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3s+7t \\ s \\ -3t \\ t \end{bmatrix}. \quad \text{よって,} \quad \boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数})}.$$

- (ii) 拡大係数行列を行基本変形して

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

より, $\boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}.$