数学演習第一（演習第 2 回）

線形：平面の方程式, 行列の演算

2026 年 5 月 13 日

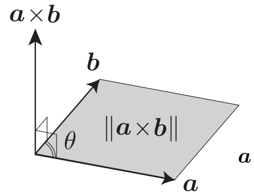
要点 1

《表記上の注意》

- 高校ではベクトルを $\overrightarrow{p}$ (矢印) の形で表したが, ここでは $\boldsymbol{p}$ (太字) と表記する．零ベクトルは $\mathbf{0}$ で表す．
- ベクトル $\boldsymbol{p}$ に対して,「点 $\boldsymbol{p}$」は $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ (O は原点) となる点 P を表す ($\boldsymbol{p}$ は点 P の位置ベクトル).

I 空間ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ に対して,

- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$, $\|\boldsymbol{a}\| := \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の**内積**, $\boldsymbol{a}$ の**長さ** (**大きさ**, **ノルム**) という．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$ のとき, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を $\theta \in [0, \pi]$ とすれば, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \cos\theta$ が成り立つ．(平面ベクトルの場合も同様.)
- $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ のとき, $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}' + \boldsymbol{b}''$ $(\underbrace{\boldsymbol{b}' = k\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{a}\text{ に平行}},\ \underbrace{\boldsymbol{b}'' \cdot \boldsymbol{a} = 0}_{\boldsymbol{a}\text{ に垂直}})$ の形に分解できる．このとき, $\boldsymbol{b}'$ を $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ に平行な直線」への**正射影**, $\boldsymbol{b}''$ を $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ に垂直な平面」への**正射影**と呼ぶ．(平面ベクトルの場合, $\boldsymbol{b}''$ は $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ に垂直な直線」への正射影となる.)

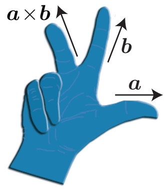


- $\boxed{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} := \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の **外積** (= **ベクトル積**) と呼ぶ． 線形 p. 8

  $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$ が平行でないとき, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を $\theta \in (0, \pi)$ とすれば,

  ① $\boxed{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \text{ は } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ の両方に垂直}}$, ② $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は**右手系**,

  ③ $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \sin\theta$ = ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積).

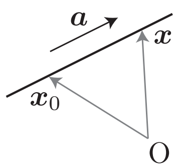


II 空間の点 $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$ に対して,

- 点 $\boldsymbol{x}_0$ を通り, $\boldsymbol{a}$ を**方向ベクトル**とする直線 ($\boldsymbol{a}$ に平行な直線) の方程式は, 線形 p. 11

$$\underset{\text{(ベクトル方程式)}}{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}} \quad \left(\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \right) \quad \text{より,} \quad \boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}.$$

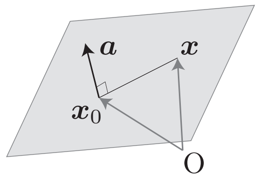
(右上の表現は $abc \neq 0$ の場合の形．例えば $ab \neq 0, c = 0$ なら, $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}, z = z_0$ となる.)



- 点 $\boldsymbol{x}_0$ を通り, $\boldsymbol{a}$ を**法線ベクトル**とする平面 ($\boldsymbol{a}$ に垂直な平面) の方程式は, 線形 p. 12

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0, \quad \text{すなわち} \quad \boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}.$$

(右上の表現は通常 $ax + by + cz + d = 0$ または $ax + by + cz = d$ の形に整理する.)



要点 2

- $l \times m$ 行列 A と $m \times n$ 行列 B に対して, $l \times n$ 行列 AB (A, B の積) が次により定義される: AB の (i, j) 成分は A の第 i 行と B の第 j 列の "内積" である．また, B の (i, j) 成分を (j, i) 成分とする $n \times m$ 行列を B の**転置行列**と呼び, ${}^t B$ で表す．
- 同じサイズの正方行列 A, B に対して, 積 AB, BA が定義されるが, 数の場合と異なり,「$AB = BA$」「$AB = O \Rightarrow A = O$ or $B = O$」が成り立つとは限らない．
- 正方行列 A に対して, $AB = BA = E$ (E は単位行列) を満たす B が存在するとき (存在すれば一意), B を A の**逆行列**と呼び, A^{-1} で表す．また, 逆行列をもつ行列を**正則行列**という．2 次正方行列では

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ が正則} \Leftrightarrow ad - bc \neq 0. \quad \text{このとき, } A \text{ の逆行列は } \boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}.$$

【演習中に扱う予定の問題】： $\boxed{3}$(2)(3), $\boxed{4}$, $\boxed{6}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}-2\\2\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}4\\-5\\3\end{bmatrix}, \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$ に対して, 以下を計算せよ. ((4), (5) については線形 第1節参照)

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$　(2) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ のなす角　(3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$　(4) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 $(=\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|)$

(5) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積 $(=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|)$　(6) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の作る四面体の体積

$\boxed{\mathbf{2}}$ 空間ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$, かつ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ は平行でない) に対して, 次の主張を示せ.

(i) $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ に平行な直線」への正射影は $\boldsymbol{b}'=\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$, その長さは $\|\boldsymbol{b}'\|=\dfrac{|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}|}{\|\boldsymbol{a}\|}$.

(ii) $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ に垂直な平面」への正射影は $\boldsymbol{b}''=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$, その長さは $\|\boldsymbol{b}''\|=\dfrac{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$.

更に, $\boxed{\mathbf{1}}$ の $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ に対して, 以下を計算せよ.

(7) $\boldsymbol{c}$ の「$\boldsymbol{a}$ に平行な直線」への正射影　(8) $\boldsymbol{c}$ の「$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に平行な平面」への正射影

$\boxed{\mathbf{3}}$ 空間の 3 点 $\mathrm{A}(1,2,0)$, $\mathrm{B}(2,-1,2)$, $\mathrm{C}(-1,0,1)$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 2 点 A, B を通る直線 (直線 AB と呼ぶ) の方程式を求めよ. (ヒント: $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が方向ベクトル)

(2) 3 点 A, B, C を通る平面 (平面 ABC と呼ぶ) の方程式を求めよ. (ヒント: $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が法線ベクトル)

(3) 原点 O から平面 ABC に下ろした垂線の長さを求めよ.

(4) 点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さを求めよ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ $A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-2&1&2\\2&3&1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-3&0&2\\0&1&4\end{bmatrix}$ のとき, 次の行列を求めよ.

(1) $2A-3B$　(2) $2X+3A=B$ を満たす行列 X　(3) BC　(4) $A\,{}^{\mathrm{t}}C\,{}^{\mathrm{t}}B$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ の逆行列, 正則性について考える.

(1) $(A-aE)(A-dE)$ (E は 2 次単位行列) を計算して, 次の関係式を導け:

$$\boxed{A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O}.$$

(2) $\widetilde{A}:=(a+d)E-A=\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$ とおくとき, (1) の関係式から, $A\widetilde{A}=\widetilde{A}A=(ad-bc)E$ を導け.

(3) (2) で導いた関係式を用いて, 次の主張を示せ.

① $ad-bc\neq0$ ならば, A は正則であり, その逆行列は $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\widetilde{A}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$.

② $ad-bc=0$ ならば, A は正則でない.

$\boxed{\mathbf{6}}$ 2 次正則行列の逆行列の公式を用いて, 次の問いに答えよ.

(1) 次の行列の逆行列を求めよ: ① $\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{bmatrix}$, ② $\begin{bmatrix}\cos\theta&-r\sin\theta\\\sin\theta&r\cos\theta\end{bmatrix}$ $(r\neq0)$.

(2) $A=\begin{bmatrix}5&-7\\2&-3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&-2\\-3&4\end{bmatrix}$ のとき, $AX+2B=BA$ を満たす行列 X を求めよ.

7 次を満たす 2 次正方行列 P, Q_θ, R_θ を定めよ.

(1) 点 (x, y) を x 軸に関して対称移動した点を (x', y') とするとき, 2 点の関係を $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の形に書き表せ.

(2) 点 (x, y) を原点の周りに θ だけ回転移動した点を (x', y') とするとき, 2 点の関係を $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の形に書き表せ. 【ヒント】複素数平面上で考えれば, $x' + iy' = (\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy)$ と書ける.

(3) x 軸を原点の周りに θ だけ回転移動した直線を ℓ_θ とする. 点 (x, y) を ℓ_θ に関して対称移動した点を (x', y') とするとき, 2 点の関係を $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の形に書き表せ.

【ヒント】点 (x, y) を, まず原点の周りに $-\theta$ だけ回転移動し (この回転移動で ℓ_θ は x 軸に重なる), 次に x 軸に関して対称移動し, 最後に原点の周りに θ だけ回転移動すれば点 (x', y') が得られる.

演習第 2 回　レポート問題

(1) (i) 空間ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ と $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ の外積ベクトル $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ を求めよ.

(ii) 空間内の 2 つの直線 $\ell_1 : \dfrac{x+4}{5} = \dfrac{y-5}{-4} = \dfrac{z+1}{3}$ と $\ell_2 : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-1}{-1}$ の交点の座標を求めよ.

(iii) ℓ_1, ℓ_2 を含む平面の方程式を求めよ.

(2) 3 つの行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を考える. A, B, C を順番に並べる方法は 6 通りあるが, そのうち積が定義される並べ方をすべて列挙し, その積を計算せよ.