

【演習中に扱う予定の問題】： 3(1)(2)(3), 4, 5, 6(1)

1 次の行列が簡約行列ではない理由として、要点 (1) の (i)~(iv) のどれに反するかを全て選んで答えよ。さらに、何回かの行基本変形で簡約行列に変形せよ。

$$(1) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2 以下は任意の行列を簡約化できる一つの手順である：

- (a) 初めは第 1 行に注目する。
- (b) 注目する行かそれより下の行のうち、主成分が一番左にある行 (複数ある場合は後で主成分を 1 とするのに都合のよい行) を (R2) を用いて注目する行と交換する (動かさない場合もある)。
- (c) その主成分が 1 でなかったら注目する行に (R1) (または (R3)) を適用して 1 にする。
- (d) その主成分がある列に (その主成分以外で) 0 でない成分があれば (R3) を用いて 0 にする。
- (e) 注目する行より下の行にある成分が全て 0 なら終了。そうでなければ注目する行を 1 つ下げて (b) に戻る。

下の行列について、この手順に従って簡約化を行った。空欄を埋めよ (記法は要点 (2) に従うこと)。

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \square & \square \\ 0 & \square & \square \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \square \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3 次の行列を何回かの行基本変形で簡約行列に変形し、階数を求めよ。

$$(1) \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 11 & 7 & 11 & 5 \\ 3 & 16 & 10 & 15 & -3 \\ 2 & 9 & 5 & 5 & -5 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

4 行列 A に行基本変形を (何回か) 施した結果が B となるときの、 $MA = B$ を満たす正則行列 M (基本行列の積で表される) が存在する (線形教科書 pp. 43-46 参照)。以下の「行基本変形 (の繰り返し)」について、 M に相当する行列を記せ。

【例】 2×2 行列に対して、「第 1 行と第 2 行を入れ換え、次に第 2 行を -3 倍する」

【解】 基本行列は 2×2 型、 $A \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}} \bullet \xrightarrow{(-3) \times \textcircled{2}} B$ なので、 $B = P_2(-3)P_{12}A$ 。従って、

$$M = P_2(-3)P_{12} = P_2(-3) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

ここで、 P_{12} 、 $P_2(-3)$ は、基本行列を表す記号 (教科書 p. 43)。

- (1) 3×2 行列に対して、「第 1 行に第 2 行の 3 倍を加える」
- (2) 4×3 行列に対して、「第 2 行と第 3 行を入れ換え、次に第 4 行を -2 倍する」

5 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & 9 \end{bmatrix}$ (問題 **3** の (1))、その簡約行列を B としたとき、 $MA = B$ となる行列 M を 1 つ求めよ。

6 次の行列の階数を求めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} a & a \\ a-1 & 1 \\ a-2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

(ヒント: 変数 a, b, c, d を含むので, 場合分けが必要となる場合がある.)

演習第 4 回 レポート問題

- (1) 次の 2 つの行列 A, B について, 行基本変形を繰り返し行うことにより, (i) 簡約行列に変形せよ.
(ii) 階数を求めよ. (iii) 主成分が存在する列をすべて挙げよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -3 & -2 \\ 3 & -6 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

- (2) $\begin{bmatrix} 1 & a & 1 & a+1 \\ a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & a \end{bmatrix}$ の階数を求めよ. a の値に応じて場合分けが必要である.