

数学演習第一（演習第 6 回）

線形：連立 1 次方程式

2026 年 6 月 10 日

要点

〈係数行列, 拡大係数行列〉

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

とおき, 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を考える. このとき, 行列 A を**係数行列**, $[A \ \mathbf{b}]$ を**拡大係数行列**という. 特に, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合 (すなわち $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$) は **同次** 連立 1 次方程式と呼ばれる.

〈連立 1 次方程式の解〉 $m \times n$ 行列 A の階数を r とする: $r = \text{rank } A (\leq \min\{n, m\})$.

$$\begin{array}{ccc} \text{連立 1 次方程式} & A\mathbf{x} = \mathbf{b} & \xleftrightarrow{\text{同値な連立 1 次方程式}} C\mathbf{x} = \mathbf{d} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \text{拡大係数行列} & [A \ \mathbf{b}] & \xrightarrow{\text{簡約化 (行基本変形)}} \cdots \cdots \cdots [C \ \mathbf{d}] \end{array}$$

- 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつための必要十分条件は

$$\text{rank } C = \text{rank } [C \ \mathbf{d}], \quad \text{すなわち} \quad \text{rank } A = \text{rank } [A \ \mathbf{b}] (= r)$$

である. この条件が満たされるとき, $n = r$ ならば $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は一意であり, $n > r$ ならば $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は $s = n - r$ 個のパラメータ (任意定数) を含む形で表される. C の主成分に対応しない変数 をパラメータとするのが標準的な解の表示法である.

- 特に, 同次連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合) は $s = n - r$ 個の 1 次独立な解をもつ. この s 個の 1 次独立な解の組を $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の**基本解**と呼ぶ.

〈例〉 連立 1 次方程式
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = b \end{cases} \text{ を解く } (a, b \text{ は定数}).$$

まず, 拡大係数行列に行基本変形を繰り返して,

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & b \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & a+2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & b+1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \end{array} \right] \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ (if } a = 0), \quad \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \end{array} \right] \text{ (if } a \neq 0). \end{aligned}$$

よって, 与えられた連立 1 次方程式は, $b \neq -1$ のとき, 解なし. $a = 0, b = -1$ のとき,

$$\begin{cases} \textcircled{x_1} - x_3 - x_4 = -1 \\ \textcircled{x_2} + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

に簡約化され, $a \neq 0, b = -1$ のとき,

$$\begin{cases} \textcircled{x_1} - x_3 = -1 \\ \textcircled{x_2} + 2x_3 = 0 \\ \textcircled{x_4} = 0 \end{cases}$$

に簡約化される. (ここでは, 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ に対して, 拡大係数行列 $[A \ \mathbf{b}]$ の簡約行列 $[C \ \mathbf{d}]$ を拡大係数行列にもつ同値な連立 1 次方程式 $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ を考えるとき, 「 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ に簡約化される」 「 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を簡約化して $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ を得る」といった言い方をした.) よって, 求める解は, (簡約化して得られた連立 1 次方程式の) 主成分に対応しない変数をパラメータ (任意定数) として選び,

- $a = 0, b = -1$ のとき,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + s + t \\ -2s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$

- $a \neq 0, b = -1$ のとき,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + t \\ -2t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

- $b \neq -1$ のとき, 解なし.

【演習中に扱う予定の問題】: 1, 2(ii), 3(2), 4(1), 5

- 1 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の拡大係数行列 $[A \ \mathbf{b}]$ の簡約行列が $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ のとき,
- $$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$
- として次の問いに答えよ.

- (1) $[A \ \mathbf{b}]$ を簡約化して得られる連立 1 次方程式を具体的に書け. 主成分に対応する変数は何か.
- (2) 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を解け. (主成分に対応しない変数を任意定数を表すパラメータにとる.)
- (3) A の簡約行列を書け. また, 同次連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解け.

- 2 次の連立 1 次方程式 (前から順に, 演習書 **問題 8.2.9** (1), **問題 8.2.10** (1), (2), (3)) を解け.

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \begin{cases} 2x + 3y + 2z = 21 \\ x + 2y + z = 14 \\ -x + y + z = 1 \end{cases} & \text{(ii)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 13 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -9 \end{cases} \\ \text{(iii)} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = -6 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases} & \text{(iv)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 13 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases} \end{array}$$

- 3 次の連立 1 次方程式を解け (a は実数定数). ((1) は逆行列を, (2) は拡大係数行列の簡約化を用いよ.)

$$\begin{array}{ll} \text{(1)} \quad \begin{cases} (a+1)x + ay = 1 \\ 3x + (a+2)y = -2 \end{cases} & \text{(2)} \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 13x_3 + 4x_4 = a \end{cases} \end{array}$$

- 4 次の同次連立 1 次方程式を解け (係数行列の簡約化を利用). 更に, **基本解と解の自由度** (線形教科書 pp.53-56 参照) を求めよ.

$$(1) \begin{cases} 2x - y + 9z = 0 \\ -x + y - 3z = 0 \\ x - 3y - 3z = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

- 5 ベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ k \\ 1 \end{bmatrix}$ (k は定数) について次の問いに答えよ.

- (1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ が **1 次独立** (すなわち $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 + c_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$) となるような k の条件を求めよ.
- (2) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ が **1 次従属** (すなわち $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 + c_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$ を満たす $(c_1, c_2, c_3, c_4) \neq (0, 0, 0, 0)$ が存在) となるような k の条件を求めよ. また, そのとき $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ の **非自明な 1 次関係式** $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 + c_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$ ($(c_1, c_2, c_3, c_4) \neq (0, 0, 0, 0)$) を 1 つ挙げよ.

[ヒント] $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4]$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$ とおけば, $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 + c_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$ は $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$ と書かれる.

- 6 $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ とおくとき, 次の問いに答えよ. ここで, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は定数ベクトル, $\mathbf{x}$ は変数ベクトルとする.

- (1) $a_1 \neq 0$ で, b が定数のとき, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = b$ を解け.
- (2) $a_3 \neq 0$ のとき, $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ を $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の形に書き, これが解をもつための条件を求めよ. 更に, その条件が満たされているとき, $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ を解け.

演習第 6 回 レポート問題

- (1) 連立 1 次方程式 $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$ に対し, 拡大係数行列 $[A|\mathbf{b}]$ が行基本変形によって

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

となったとする. もとの連立一次方程式の一般解を求めよ.

- (2) 次の連立 1 次方程式を解け.

$$(i) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$