

数学演習第一（演習第7回）

微積：高次の導関数, テーラーの定理, 有限テーラー展開

2025 年 6 月 24 日

要点 1

1°. n 回微分可能, n 回連続微分可能 (C^n 級)

- 微分可能 = 1 回微分可能, 導関数 = 1 次導関数と解釈する. $n \geq 2$ に対して, 帰納的に, $f(x)$ が $n-1$ 回微分可能で, $n-1$ 次導関数 $f^{(n-1)}(x)$ が微分可能なとき, $f(x)$ は **n 回微分可能** であるといい, $f^{(n-1)}(x)$ の導関数 $f^{(n)}(x) := \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x)$ を **n 次導関数** という.
- $f(x)$ が n 回微分可能で n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ が連続のとき, $f(x)$ は **n 回連続微分可能** または **C^n 級** という. (微分可能なら連続ゆえ) $f(x)$ が n 回微分可能ならば C^{n-1} 級であることが保証される. また, $f(x)$ が何回でも微分可能なとき, $f(x)$ は **無限回微分可能** または **C^∞ 級** という.

2°. ライプニッツ Leibniz の公式

$f(x), g(x)$ が n 回微分可能ならば, 積 $f(x)g(x)$ も n 回微分可能であり, 次の関係式が成り立つ:

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x). \quad (\text{注: } f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f'')$$

3°. 基本的な関数の n 次導関数

- ① $(e^x)^{(n)} = e^x$. ② $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$. ③ $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.
- ④ $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$. 一般に, $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$ (α は定数, $n \geq 1$).
- ⑤ $(\log x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ ($n \geq 1$).

要点 2

1°. テイラー 有限 Taylor 展開

$f(x)$ が a を含む開区間 I で N 回微分可能なとき, 各 $x \in I$ に対して,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_N(x), \quad R_N(x) = \frac{f^{(N)}(a + \theta(x-a))}{N!} (x-a)^N$$

N 次の剰余項

を満たす θ ($0 < \theta < 1$) が存在する. 特に, $a = 0$ の場合を **マクローリン 有限 Maclaurin 展開** という.

2°. 基本的な関数の有限 マクローリン Maclaurin 展開

- ① $e^x = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!} + R_N(x)$.
- ② $\cos x = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} + R_{2M}(x)$, ③ $\sin x = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} + R_{2M+1}(x)$.
- ④ $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x^n + R_N(x)$, ⑤ $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + R_N(x)$ ($x > -1$).

【演習中に扱う予定の問題】： 3(1)(3)(5)(6), 4(2)(3), 7(0)(1)

1 $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ の導関数を求め、 C^1 級かどうかを調べよ。

2 (1) 開区間 I 上の C^2 級関数 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ が与えられたとき、 $\varphi'(t) \neq 0$ ($t \in I$) であれば、 y は x の C^2 級関数となる。このとき、 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せば、次の式が得られる。これを示せ。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\{\varphi'(t)\}^3}.$$

(2) 曲線 $x = \varphi(t) = \sinh t$, $y = \psi(t) = \cosh t$ 上の点 $(\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$ において、 $\frac{dy}{dx}$ および $\frac{d^2y}{dx^2}$ の値を求めよ。

3 次の各関数 $y = y(x)$ について、 n 次導関数 $y^{(n)}$ を求めよ (演習書 問題 3.2.5 類題)。

(0) **要点 1** の 3° を確認せよ。 (1) $y = f(ax + b)$ (f は C^∞ 級, a, b は定数で $a \neq 0$)

(2) $y = \log \sqrt{\frac{1+2x}{1-x}}$ (3) $y = \cos^2 x$ ($\cos 2x$ で表す) (4) $y = \frac{1}{1-2x-3x^2}$ (部分分数分解)

(5) $y = x^3 e^{-2x}$ (ライプニッツの公式) (6) $y = e^x \sin x$ (まず y' を三角関数の合成で整理)

(7) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (**2 重階乗**を用いて表せ) 但し、 n の **2 重階乗** $n!!$ は

$$n!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdots n & (n \text{ 以下の奇数の積}) \text{ if } n \geq 1: \text{奇数} \\ 2 \cdot 4 \cdots n & (n \text{ 以下の偶数の積}) \text{ if } n \geq 2: \text{偶数} \end{cases} \quad \text{および} \quad (-1)!! = 0!! = 1$$

で定義される。従って、例えば $n! = (n-1)!! \cdot n!!$, $(2n)!! = 2^n n!$ ($n \geq 0$) が成り立つ。

4 (演習書 問題 3.2.7 類題) 次の各関数 $f(x)$ に対して、 $f^{(n)}(0)$ を計算し、有限マクローリン展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_N(x), \quad R_N(x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N \quad (0 < \exists \theta < 1) \\ \theta \text{ は } x, N \text{ に依存}$$

を求めよ。更に、 $N = 6$ ($M = 3$) のとき、剰余項以外の部分を (記号 $\sum$ を使わず) 具体的に書け。

(0) **要点 2** の 2° を確認せよ。 (1) $f(x) = \frac{1}{1-2x-3x^2}$ (2) $f(x) = e^x \sin x$

(3) $f(x) = \cosh x$ (4) $f(x) = \sinh x$ ((3) は要点 2 の 2° の ② の形, (4) は ③ の形に)

5 $f(x) = x^3 \sin x$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ は

$$f^{(n)}(x) = p_n(x) \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + q_n(x) \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (p_n(x), q_n(x) \text{ は } x \text{ の整式})$$

の形に表される。 $p_n(x)$, $q_n(x)$ を求めよ。 (ライプニッツの公式と $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$ を用いる)

6 関数 x^p , $\frac{1}{x^p}$ ($p \in \mathbb{N}$) に対して、 $x = 1$ における有限 Taylor 展開を N 次 ($N > p$) の剰余項 $R_N(x)$ まで求めよ。

7

$f(x)$ が 0 を含む開区間 I で C^∞ 級の時、任意の自然数 N に対して $f(x)$ は [4] で述べた形の有限マクローリン展開をもつ。そこに現れる x^n の係数 $a_n := \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ について以下の問いに答えよ。

- (0) $f(x)$ が奇関数 (すなわち $f(-x) = -f(x)$) のとき $a_{2m} = 0$ となることを示せ。また、 $f(x)$ が偶関数 (すなわち $f(-x) = f(x)$) のとき $a_{2m+1} = 0$ となることを示せ。

以下の関数 $f(x)$ は両方とも奇関数なので $f^{(2m)}(0) = a_{2m} = 0$ ($m \geq 0$) が成り立つことに注意する。

- (1) $f(x) = \sin^{-1} x$ ($-1 < x < 1$) のとき、① $(1-x^2)f''(x) = xf'(x)$ を示せ。② この両辺を n 回微分して次式を示せ: $(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2f^{(n)}(x) = 0$ ($n \geq 0$)。

③ $f^{(2m+1)}(0) = \{(2m-1)!!\}^2$ ($m \geq 0$) を示せ。④ a_{2m+1} ($m \geq 0$) を求めよ。(演習 3.10 参照)

- (2) $f(x) = \tan x$ に対して、① $f'(x) = 1 + f(x)^2$ を確認せよ。② 前式の両辺を n 回微分して $f^{(n+1)}(x)$ を $f^{(j)}(x)$ ($0 \leq j \leq n$) で表せ。③ $f^{(2m+1)}(0)$ を $f^{(2k+1)}(0)$ ($0 \leq k \leq m-1$) で表せ。④ a_{2m+1} を a_{2k+1} ($0 \leq k \leq m-1$) で表せ。⑤ a_1, a_3, a_5, a_7 を求めよ。

演習第 7 回 レポート問題

- (1) (i) $f(x) = \log(3-2x)$ ($x < 3/2$) の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ ($n \geq 1$) を求めよ。

- (ii) $f(x) = x^2 \cos x$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ は

$$f^{(n)}(x) = p_n(x) \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + q_n(x) \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (p_n(x), q_n(x) \text{ は } x \text{ の整式})$$

の形に表される。ライプニッツの公式を用いて $p_n(x), q_n(x)$ を求めよ。

- (2) (1) の結果を利用して、(i),(ii) の $f(x)$ について 4 次までのマクローリン展開を求めよ。さらに、直接微分することで、 $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ の 4 次までのマクローリン展開を求めよ。いずれも剰余項は求めなくてよい。