

数学演習第二（演習第1回）

線形：前期線形の復習（連立1次方程式と行列式） 2026年10月7日

【演習中に扱う予定の問題】：(1)-(8)

$$\boxed{1} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 2 & -1 \\ 5 & 10 & 6 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad \text{および} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad \text{とする.}$$

- (1) 同次連立1次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ について、解の自由度、基本解を求め、 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を解け。
(2) 連立1次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つための a, b, c, d の条件を求めよ。

$$\boxed{2} \quad \lambda \text{ を実数とし, } A = \begin{bmatrix} \lambda & -9 & 6 \\ 2 & \lambda+9 & -4 \\ 1 & 3 & \lambda+1 \end{bmatrix} \quad \text{とする.}$$

- (3) A の行列式 $|A|$ を因数分解された形で求めよ。
(4) A が正則となるための λ の条件を求めよ。
(5) A が正則でないとき、 A の階数を求めよ。
(6) A が正則でないとき、同次連立1次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を解け。

要点1：集合の記法（線形教科書 p.101）

集合を構成するものを**元**（げん）といい、 x が集合 X の元であることを $x \in X$ や $X \ni x$ とかく。
変数 x に関する命題 $P(x)$ をみたすもの全体のなす集合を $\{x \mid P(x)\}$ とかく。

$$\boxed{\text{例}} \quad [0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}, \quad \text{平面上の単位円は } \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}.$$

$\boxed{3}$ 集合

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} 3x - 4y - 5z = 8 \\ 2x - 3y - 4z = 5 \end{array} \right\}$$

は、非同次連立1次方程式 $\begin{cases} 3x - 4y - 5z = 8 \\ 2x - 3y - 4z = 5 \end{cases}$ の解全体のなす集合であるとみなすことができるし、空間における2つの平面 $3x - 4y - 5z = 8$ と $2x - 3y - 4z = 5$ の交線でもある。

- (7) 非同次連立1次方程式 $\begin{cases} 3x - 4y - 5z = 8 \\ 2x - 3y - 4z = 5 \end{cases}$ を解け。
(8) (7) を用いて2つの平面 $3x - 4y - 5z = 8$ と $2x - 3y - 4z = 5$ の交線の方程式を求めよ。
(9) ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ の W に平行な直線への正射影（つまり交線の方法ベクトルへの正射影）を求めよ。

〈写像と像〉 集合 X から集合 Y への**写像**とは, 集合 X の元 x に対して, 集合 Y の元がただ一つ定まる対応のことであり, x に対応する Y の元を $f(x)$ とかき, 写像 $f: X \rightarrow Y$ とかく. 対応を $x \mapsto f(x)$ とかくこともある. 写像 $f: X \rightarrow Y$ と X の部分集合 Z に対し, $f(Z) = \{f(x) \in Y \mid x \in Z\}$ を f による Z の**像**という. ($Z = X$ のときは単に f の像ということもある.)

〈写像の合成〉 2つの写像 $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow Z$ に対し, $x \in X$ に対し, $f(x) \in Y$ の g による行き先 $g(f(x)) \in Z$ 対応させることで得られる写像を $g \circ f: X \rightarrow Z$ とかいて, f と g の**合成写像**とよぶ.

例 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = 2x$, $g(x) = \sin x$ とすると, $f \circ g(x) = 2 \sin x$, $g \circ f(x) = \sin 2x$.

〈全射・単射・全単射〉

写像 $f: X \rightarrow Y$ が**全射** $\xLeftrightarrow{\text{定義}} f(X) = Y$

$\iff$ どんな $y \in Y$ をとってきても $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する.

$f: X \rightarrow Y$ が**単射** $\xLeftrightarrow{\text{定義}} x, x' \in X$ が異なる元ならば必ず $f(x) \neq f(x')$.

$\xLeftrightarrow{\text{対偶}} x, x' \in X$ が $f(x) = f(x')$ をみたすなら $x = x'$.

写像 $f: X \rightarrow Y$ が全射かつ単射のとき**全単射**であるという.

集合 X の元 x に x 自身を対応させることで得られる写像を $\text{id}_X: X \rightarrow X$ とかいて恒等写像という. $f: X \rightarrow Y$ が全単射であるための必要十分条件は, $g \circ f = \text{id}_X$ かつ $f \circ g = \text{id}_Y$ をみたす $g: Y \rightarrow X$ が存在することである (線形教科書 命題 20.3). この g を f の**逆写像**といい, $g = f^{-1}$ とかく. f が全単射のとき, その逆写像はただ一つに定まる.

4

- (10) 次の写像 $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) について, 全射か, 単射か, それぞれ判定せよ. また, 全射でないものは $\mathbb{R}$ の像を求めよ.

$$f_1(x) = \tan^{-1} x, \quad f_2(x) = x^2 - x, \quad f_3(x) = x^3 + x, \quad f_4(x) = x + \sin 2x$$

- (11) 次の2つの写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ と $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を考える. 合成写像 $g \circ f$ および $f \circ g$ について, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対応する元を求めよ.

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+1 \\ xy \end{bmatrix}, \quad g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ y \end{bmatrix}$$

演習第 1 回 レポート問題

I $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ および $b = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ とする.

- (1) 同次連立 1 次方程式 $Ax = \mathbf{0}$ について, 解の自由度, 基本解を求め, $Ax = \mathbf{0}$ を解け.
 (2) 連立 1 次方程式 $Ax = b$ が解を持つための a, b, c, d の条件を求めよ.

II λ を実数とし, $A = \begin{bmatrix} \lambda-6 & -3 & -3 \\ 6 & \lambda+3 & 6 \\ 3 & 3 & \lambda \end{bmatrix}$ とする.

- (3) A の行列式 $|A|$ を因数分解された形で求めよ.
 (4) A が正則でないとき, 同次連立 1 次方程式 $Ax = \mathbf{0}$ を解け.