

数学演習第二（演習第1回）【解答例】

線形：前期線形の復習（連立1次方程式と行列式） 2026年10月7日

注意：連立1次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ や $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ のすべての解を表示したものを「一般解」とよぶことがある。「連立1次方程式を解く」ことは「一般解の表示を求めること」であり、解答例では「一般解」という用語も使用する。

1

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 & a \\ 3 & 6 & 4 & 2 & -1 & b \\ 5 & 10 & 6 & -4 & 3 & c \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 3 & d \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 & a \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 & b-3a \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 & c-5a \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -1 & d-2a \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 & a \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 & b-3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b+c-2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -b+d+a \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -14 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b+c-2a \end{array} \right]$$

- (1) 係数行列の簡約行列に対応する左側の5列を見る．主成分に対応しない変数は x_2, x_4 だから，解の自由度は2．基

本解は，解の自由度の個数分の1次独立な解のことである．その一例は， $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ -11 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ．（ x_2, x_4

に対応する第2成分と第4成分だけに着目すれば， $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ となる c_1, c_2 が $c_1 = c_2 = 0$ のみであること，従って1次独立であることがわかる．あるいは， $\text{rank}[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = 2$ であることが即座にわかったと言ってもよい．）一

般解は， $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ -11 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (s, t は任意の実数)．

- (2) 非同次連立1次方程式が解を持つための条件は，係数行列と拡大係数行列の階数が一致することであった．上の拡大係数行列の行基本変形の結果から，解を持つための条件は， $-2a - b + c = 0$ ．

2

- (3) A の第3行の3倍を1行に， -2 倍を2行に加えても行列式の値は変わらないことに注意して

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & -9 & 6 \\ 2 & \lambda+9 & -4 \\ 1 & 3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & 3\lambda+9 \\ 0 & \lambda+3 & -2\lambda-6 \\ 1 & 3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+3)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+3)^2(\lambda+1-3+6) = (\lambda+3)^2(\lambda+4)$$

- (4) A が正則となる条件は， $|A| \neq 0$ だから， $\lambda \neq -3, -4$

- (5) A が正則にならないとき， $\lambda = -3$ または $\lambda = -4$ である．

- $\lambda = -3$ のとき， $A = \begin{bmatrix} -3 & -9 & 6 \\ 2 & 6 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，階数は1．
- $\lambda = -4$ のとき， $A = \begin{bmatrix} -4 & -9 & 6 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，階数は2．

まとめると， $\lambda = -3$ のとき階数1， $\lambda = -4$ のとき階数2

- (6) (5) から A が正則でないときの簡約行列が読み取れるので， s, t を任意の実数として， $\lambda = -3, -4$ の場合の一般解はそれぞれ次のように表示できる．

$$\lambda = -3 \text{ のとき， } \mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = -4 \text{ のとき， } \mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3

$$(7) \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & -5 & 8 \\ 2 & -3 & -4 & 5 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & -4 & 5 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \text{ より, 一般解は,}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(8) \text{ 一般解の表示から } t \text{ を消去して, } \frac{x-4}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}, \text{ すなわち, } \boxed{4-x = \frac{1-y}{2} = z}$$

$$\langle \text{注意} \rangle \text{ 平面 } 3x - 4y - 5z = 8 \text{ の法線ベクトル } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ と平面 } 2x - 3y - 4z = 5 \text{ の法線ベクトル } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

の外積ベクトル $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ となっており, これ (の -1 倍) が上の一般解の表示の基本解部分に確かに現れている。

$$(9) \text{ 交線の方向ベクトルは, } \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ だから, } \mathbf{b} \text{ の } \mathbf{a} \text{ 方向への正射影は, } \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4 実数上の実数値関数を考えている場合, $\mathbb{R}$ の像とは関数の値域のことに他ならない。

(10) f_1 は実数全体で狭義単調増加だから, $x \neq x'$ なら $f(x) \neq f(x')$, つまり単射. 値域すなわち $\mathbb{R}$ の像は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ だから, f_1 は全射でない。

$f_2(0) = f_2(1) = 0$ だから f_2 は単射ではない. f_2 の値域すなわち $\mathbb{R}$ の像は二次関数の概形をみることにより, $[-\frac{1}{4}, +\infty)$ だから全射ではない。

f_3 は実数全体で定義された連続関数で, $f'_3(x) = 3x^2 + 1 > 0$ より狭義単調増加. 従って単射. さらに $x \rightarrow \pm\infty$ において $\pm\infty$ に発散するから, 像は $\mathbb{R}$ 全体となり全射である。

f_4 は実数全体で定義された連続関数で, $x \rightarrow \pm\infty$ において $\pm\infty$ に発散するから全射である. しかし, 例えば $x = \frac{\pi}{3}$ で極大値を持つので, $x = \frac{\pi}{3}$ の前後で値が等しくなる点がある. 従って単射ではない。

$$(11) g \circ f \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = g \left(\begin{bmatrix} x+1 \\ xy \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x+xy+1 \\ xy \end{bmatrix}. \quad f \circ g \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = f \left(\begin{bmatrix} x+y \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x+y+1 \\ (x+y)y \end{bmatrix}.$$

レポート問題の解答例

I

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & -3 & a \\ 1 & -2 & 2 & -2 & b \\ 2 & -5 & 3 & -5 & c \\ 1 & -1 & 3 & 1 & d \end{array} \right] &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & -3 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & c-2a \\ 0 & 2 & 2 & 4 & d-a \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 & 3b-2a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b+c-a \\ 0 & 0 & 0 & 2 & d+a-2b \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 & * \\ 0 & 1 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a-b+c \end{array} \right] \end{aligned}$$

(1) 解の自由度は 1. 基本解は, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. 一般解は, $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (s は任意の実数)

(2) 求める条件は, $-a - b + c = 0$

II

(3) $|A|$ を求めるために第 3 行の 1 倍を 1 行に, -2 倍を 2 行に加える.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} \lambda-6 & -3 & -3 \\ 6 & \lambda+3 & 6 \\ 3 & 3 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & \lambda-3 \\ 0 & \lambda-3 & 6-2\lambda \\ 3 & 3 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-3)^2 \{\lambda-3+6\} = (\lambda-3)^2(\lambda+3) \end{aligned}$$

(4) A が正則でないための λ の条件は, $\lambda = 3, -3$. $\lambda = 3$ のとき, $A = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ だから,

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の一般解は, $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s, t は任意の実数).

$\lambda = -3$ のとき, $A = \begin{bmatrix} -9 & -3 & -3 \\ 6 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -9 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ だから, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の

一般解は, $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s は任意の実数).

まとめると

$$\lambda = 3 \text{ のとき, } \mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (s, t は任意の実数). } \lambda = -3 \text{ のとき, } \mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (s は任意の実数).}$$