数学演習第二 （演習第２回）

微積：広義積分　2026 年 10 月 14 日

【演習中に扱う予定の問題】： 1,2(1)(2)(4)(5)(6),3(1)(2)

要点 1：広義積分の定義と計算

〈広義積分の定義〉 閉区間上の連続関数の定積分を, 非有界関数あるいは無限区間の場合に拡張する.

- 区間 $[a,b)$ $(-\infty < a < b \leqslant \infty)$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して, $f(x)$ の $[a,b)$ における**広義積分**を
$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\beta\to b-0}\int_a^\beta f(x)\,dx \quad (b=\infty \text{ のときは } \lim_{\beta\to\infty} \text{ と読み替える})$$
で定義する (極限が存在するときのみ意味をもつ). 特に, 右辺が収束するとき, **広義積分** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ が **収束**するといい, 収束しないとき **発散**するという.
- 区間 $(a,b]$ $(-\infty \leqslant a < b < \infty)$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して, $f(x)$ の $(a,b]$ における広義積分を
$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\alpha\to a+0}\int_\alpha^b f(x)\,dx \quad (a=-\infty \text{ のときは } \lim_{\alpha\to-\infty} \text{ と読み替える})$$
で定義する. 用語については上と同様.
- 区間 (a,b) $(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して, $f(x)$ の (a,b) における広義積分は，$c \in (a,b)$ をひとつとって，2 つの広義積分 $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ が共に収束するとき，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ と定義する．この値は c の選び方によらずに定まる.
- $f(x)$ が区間 $[a,b]$ 中の $a<c<b$ で非有界な場合には $x=c$ で積分区間を分割して同様に定義する.

〈広義積分の計算〉 区間 $[a,b)$ 上の連続関数 $f(x)$ の原始関数 (不定積分) $F(x)$ が分かっていれば,
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\to b-0}\big[F(x)\big]_a^\beta = \lim_{\beta\to b-0}F(\beta)-F(a).$$
ここで, $\lim_{\beta\to b-0}\big[F(x)\big]_a^\beta$ は $\big[F(x)\big]_a^{b-0}$ $\big(\big[F(x)\big]_a^\infty$ $(b=\infty$ のとき$)\big)$ とも書かれる.

例 1　原始関数を求めて極限値を計算することで値が求められる広義積分の計算例.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \Big[-2\sqrt{1-x}\Big]_0^{1-0} = 2 \qquad \text{(区間 } [0,1) \text{ における広義積分)}$$
$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big[\mathrm{Sin}^{-1}x\Big]_{-1+0}^{1-0} = \frac{\pi}{2}-\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \pi \qquad \text{(区間 } (-1,1) \text{ における広義積分)}$$
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\mathrm{Tan}^{-1}x\Big]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2}-\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \pi \qquad \text{(区間 } (-\infty,\infty) \text{ における広義積分)}$$
$$\int_0^1 \log x\,dx = \Big[x(\log x-1)\Big]_{+0}^{1} = -1-\lim_{x\to+0}(x\log x - x) = -1 \qquad \text{(区間 } (0,1] \text{ における広義積分)}$$

1 区間 $(0,\infty)$ 上の連続関数 $\dfrac{1}{x^s}$ ($s>0$ は定数) に対して次を示せ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-s} & (\text{if } 0<s<1) \\ \infty & (\text{if } s \geqslant 1) \end{cases}$ (区間 $(0,1]$ における積分).

(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \dfrac{1}{s-1} & (\text{if } s>1) \\ \infty & (\text{if } 0<s\leqslant 1) \end{cases}$ (区間 $[1,\infty)$ における積分).

2 次の広義積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\log x)^2}{\sqrt{x}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ (3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$

(4) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-x+1}$ (5) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+5x+6}$ (6) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx$

(7) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^2}\,dx$ (8) $\displaystyle\int_0^\infty (1-\tanh x)\,dx$ (9) $\displaystyle\int_{\log 3}^\infty \frac{dx}{\sinh x}$

要点 2：広義積分の収束・発散の判定（優関数による評価）

$[a,b)$ 上の連続関数 $f(x)$, $g(x)$ ($g(x)$ は広義積分の収束・発散の分かった非負関数) に対して,

- $|f(x)| \leqslant g(x)$ かつ $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx<\infty$ ならば, 広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する.
- $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ かつ $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx=\infty$ ならば, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\infty$ (広義積分は ∞ に発散).

他のタイプの区間における広義積分についても同様な主張が成り立つ.

例 2 適切な優関数をとって広義積分の収束・発散を判定する例.

$I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}dx$ $[0,1)$ において $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\right| \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.
例 1 から $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ は収束. よって, I_1 は収束.

$I_2 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}dx$ $[1,+\infty)$ において $\dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}} \leqq \dfrac{1}{x^2}$ と 1 (2) より, I_2 は収束.

$I_3 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+\log x}$ $[1,+\infty)$ で $0 \leqq \log x < x$ より $0 \leqq \dfrac{1}{1+x} < \dfrac{1}{1+\log x}$.
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x} = \left[\log(1+x)\right]_1^{+\infty} = +\infty$ より, I_3 は発散.

3 次の広義積分の収束・発散を調べよ.

(1) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ (2) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)}}$ (3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,dx$ (4) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$

発展：広義積分の収束・発散は，積分される関数の非有界な点と無限遠での様子だけで決まるので，収束・発散の判定では，次のような議論がよく用いられる．$1<c<+\infty$ で積分を 2 つ分けて

$$I_4 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int_1^c \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} + \int_c^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$$ （微積教科書 p.69 例 10）

とし，非有界な点 $x=1$ の近くと $+\infty$ での $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}$ の様子を調べる．（$(1,+\infty)$ で $0 \leqq f(x)$.）

まず，$\sqrt{x-1}f(x) = \dfrac{1}{x} \to 1\ (x \to 1+0)$ である．$\sqrt{x-1}f(x)$ は $x > 1$ の範囲で $x = 1$ の十分近くでは，（値は 1 にいくらでも近づくので，例えば $1 < a < c$ を十分 1 に近くとることで $(1, a)$ の範囲で）2 以下，つまり $f(x) \leqq \dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$ が成り立つ．$\displaystyle\int_1^a \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \left[2\sqrt{x-1}\right]_1^a = 2\sqrt{a-1}$ だから，$x = 1$ のまわりで要点 2 が使えて広義積分 $\displaystyle\int_1^c f(x)dx$ は収束する．（区間 $[a, c]$ 上の積分は通常の積分なので収束・発散に影響しない．）

次に，$x^{\frac{3}{2}}f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{\dfrac{1}{1-x^{-1}}} \to 1\ (x \to +\infty)$ である．$x^{\frac{3}{2}}f(x)$ は十分大きい x では，（値は 1 にいくらでも近づくので，例えば $c < M$ を十分大きくとることで $[M, +\infty)$ の範囲で）2 以下，つまり $f(x) \leqq 2x^{-\frac{3}{2}}$ が成り立つ．1(2) から $\displaystyle\int_M^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}}dx$ は収束するので，要点 2 が使えて，$\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x)dx$ は収束する．（区間 $[c, M]$ 上の積分は通常の積分なので収束・発散に影響しない．）

まとめると I_4 は収束とわかる．

演習第 2 回　レポート問題

I　次の広義積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{Tan}^{-1}x}{x^2}\,dx$

II　$\alpha > 0$ とする．広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^{\alpha}}\,dx$ が収束する α の範囲を求めよ．