数学演習第二（演習第２回）　【解答例】

微積：広義積分　2026 年 10 月 14 日

1　$\dfrac{1}{x^s}$ $(x>0)$ の不定積分 (積分定数省略) は

$$0<s\neq 1 \text{ のとき } \int \frac{dx}{x^s}=\int x^{-s}\,dx=\frac{x^{1-s}}{1-s},\quad s=1 \text{ のとき } \int \frac{dx}{x}=\log x.$$

これを用いて,

(1) $0<s\neq 1$ のとき $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^s}=\Big[\frac{x^{1-s}}{1-s}\Big]_{+0}^{1}=\begin{cases}\frac{1}{1-s} & (s<1)\\ \infty & (s>1)\end{cases}$, $s=1$ のとき $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}=\big[\log x\big]_{+0}^{1}=\infty.$

(2) $0<s\neq 1$ のとき $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}=\Big[\frac{x^{1-s}}{1-s}\Big]_{1}^{\infty}=\begin{cases}\frac{1}{s-1} & (s>1)\\ \infty & (s<1)\end{cases}$, $s=1$ のとき $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}=\big[\log x\big]_{1}^{\infty}=\infty.$

2

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\log x)^2}{\sqrt{x}}\,dx=\Big[2\sqrt{x}\,(\log x)^2\Big]_{+0}^{1}-4\int_0^1\frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx=-4\Big[2\sqrt{x}\,\log x\Big]_{+0}^{1}+8\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=8\Big[2\sqrt{x}\Big]_{+0}^{1}=16.$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac12\right)^2-\left(x-\frac12\right)^2}}=\Big[\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x-\frac12}{\frac12}\Big]_{+0}^{1-0}=\Big[\mathrm{Sin}^{-1}(2x-1)\Big]_{+0}^{1-0}=\frac{\pi}{2}-\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)=\pi.$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac12\right)^2-\frac14}}=\Big[\log\Big(x+\frac12+\sqrt{x(1+x)}\Big)\Big]_{+0}^{1}=\log\frac{\frac32+\sqrt{2}}{\frac12}=2\log(1+\sqrt{2}\,).$

(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\int\frac{dx}{\left(x-\frac12\right)^2+\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{\sqrt3}{2}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x-\frac12}{\frac{\sqrt3}{2}}=\frac{2}{\sqrt3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt3}$ より,

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x^2-x+1}=\Big[\frac{2}{\sqrt3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt3}\Big]_0^\infty=\frac{2}{\sqrt3}\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\Big)=\frac{4\pi}{3\sqrt3}.$$

(5) $\displaystyle\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$ より,

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+5x+6}=\int_0^\infty\Big(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\Big)\,dx=\Big[\log\frac{x+2}{x+3}\Big]_0^\infty=\log\frac32.$$

(6) 部分積分を繰り返して,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx&=\Big[-e^{-x}\sin x\Big]_0^\infty+\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx=\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx\\&=\Big[-e^{-x}\cos x\Big]_0^\infty-\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx=1-\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx.\end{aligned}$$

よって, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx\ \Big(=\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx\Big)=\frac12.$

(7) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\log(1+x^2)}{x^2}\,dx=\Big[-\frac1x\log(1+x^2)\Big]_{+0}^{\infty}+\int_0^\infty\frac1x\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx=\Big[2\,\mathrm{Tan}^{-1}x\Big]_0^\infty=\pi.$

(8) $\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}=\dfrac{(\cosh x)'}{\cosh x}$ より,

$$\int_0^\infty(1-\tanh x)\,dx=\Big[x-\log(\cosh x)\Big]_0^\infty=\Big[\log\frac{e^x}{\cosh x}\Big]_0^\infty=\Big[\log\frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}\Big]_0^\infty=\log 2.$$

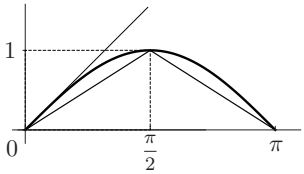
(9) $\displaystyle\frac{1}{\sinh x}=\frac{\sinh x}{\cosh^2x-1}=\frac12\Big(\frac{1}{\cosh x-1}-\frac{1}{\cosh x+1}\Big)(\cosh x)'$ であるから, $t=\cosh x$ とおいて,

$$\int_{\log 3}^\infty\frac{dx}{\sinh x}=\frac12\int_{\cosh(\log 3)}^\infty\Big(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\Big)\,dt=\frac12\Big[\log\frac{t-1}{t+1}\Big]_{\frac53}^{\infty}=-\frac12\log\frac{5-3}{5+3}=\log 2.$$

ここで, $\cosh(\log 3)=\dfrac{3+3^{-1}}{2}=\dfrac53$ を用いた．本質的に同じだが, $\displaystyle\int_{\log 3}^\infty\frac{dx}{\sinh x}=\frac12\Big[\log\frac{\cosh x-1}{\cosh x+1}\Big]_{\log 3}^{\infty}=\log 2$ と計算してもよい.

3

(1) まず, 区間 $(0,\pi)$ 上の正値連続関数 $\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ に関して対称であるから, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ が収束することを示せば十分. 次に, $0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ において $y=\sin x$ は上に凸ゆえ $0<\dfrac{2x}{\pi}\leqslant\sin x\ (\leqslant x)$ (右図参照), 従って $0<\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}\leqslant\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$. ここで, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,dx\overset{\frac{2x}{\pi}=y}{=}\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{y}}=\pi<\infty$ より $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ は収束する.



《別法》$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$ であるから, 区間 $(0,a]$ $(a>0:$十分小$)$ において $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ が成り立つ. よって, $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=2<\infty$ から $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ が収束することが分かる (収束性が問題になるのは $x=0$ の近くのみ).

(2) $x\geqslant2$ の範囲で, $x^2\geqslant x(x-1)$ に注意すると, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)}}$ が成り立つ. 1(2) から, $\displaystyle\int_2^\infty\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}$ は発散する. 要点 2 が使えて, 与えられた広義積分は発散する.

《補足》$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x(x+1)}}$ だと, $2\geqslant x$ で $x^2\leqslant x(x+1)$ になってしまうので上のようにはできないが, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x(x+1)}}$ に対し, $x^{\frac{2}{3}}f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^{-1}}}\to1\ (x\to+\infty)$ なので, 十分大きい M をとれば, $[M,+\infty)$ で $\dfrac{1}{2}\leqslant x^{\frac{2}{3}}\cdot f(x)$ つまり, $\dfrac{1}{2x^{\frac{2}{3}}}\leqslant f(x)$ が成り立つ. よって 1(2) と要点 2 が使えて, $\displaystyle\int_2^{+\infty}f(x)dx$ も発散と言える.

(3) $0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ において, $\sin x\geqslant\dfrac{2x}{\pi}>0$ より $|\log(\sin x)|=-\log(\sin x)\leqslant-\log\dfrac{2x}{\pi}$ $(-\log x$ は単調減少関数$)$. ここで,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(-\log\frac{2x}{\pi}\Big)\,dx\overset{\frac{2x}{\pi}=y}{=}-\frac{\pi}{2}\int_0^1\log y\,dy=\frac{\pi}{2}<\infty$$

であるから, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)\,dx$ は収束する. (値は $-\dfrac{\pi}{2}\log2$ となることが知られている.)

《別法》$\displaystyle\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\log(\sin x)=\lim_{x\to+0}\frac{\log(\sin x)}{x^{-1/2}}\overset{\text{ロピタル}}{=}\lim_{x\to+0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}=-2\lim_{x\to+0}\Big(\frac{x}{\sin x}\cdot\sqrt{x}\cos x\Big)=0$ であるから, 区間 $(0,a]$ $(a>0:$十分小$)$ において $|\log(\sin x)|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ が成り立つ. よって, $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=2<\infty$ から $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)\,dx$ が収束することが分かる (収束性が問題になるのは $x=0$ の近くのみ).

(4) $0<x\leqslant1$ において $\left|\dfrac{\log x}{1+x^2}\right|\leqslant|\log x|$ で, $\displaystyle\int_0^1|\log x|\,dx=-\int_0^1\log x\,dx=1<\infty$ であるから $\displaystyle\int_0^1\frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ は収束する. 次に, $x\geqslant1$ において, $0\leqslant\dfrac{\log x}{1+x^2}=\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}\leqslant\dfrac{C}{x^{3/2}}$ $(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}=0$ より, $x\geqslant1$ において $0\leqslant\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}\overset{\exists}{\leqslant}C<\infty)$ であり, $\displaystyle\int_1^\infty\frac{dx}{x^{3/2}}=2<\infty$ であるから $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ も収束する. よって,

$$\int_0^\infty\frac{\log x}{1+x^2}\,dx=\int_0^1\frac{\log x}{1+x^2}\,dx+\int_1^\infty\frac{\log x}{1+x^2}\,dx$$

は収束する. (実は, $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\log x}{1+x^2}\,dx\overset{\frac{1}{x}=y}{=}\int_1^0\frac{\log\frac{1}{y}}{1+\frac{1}{y^2}}\Big(-\frac{dy}{y^2}\Big)=-\int_0^1\frac{\log y}{y^2+1}\,dy=-\int_0^1\frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ であるから, $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\log x}{1+x^2}\,dx=0$ と分かる.)

レポート問題の解答例

Ⅰ

(1) $\dfrac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}$ は積分の端点 $x=\pm1$ で非有界なため広義積分となっている．しかし，$x=\sin\theta$ と置換すると置換後の被積分関数 $\dfrac{\cos\theta}{(2+\sin\theta)\cos\theta}$ は $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ で $\dfrac{1}{2+\sin\theta}$ であり，$\theta\to\pm\dfrac{\pi}{2}$ にも連続に拡張できるので，θ に関しては通常の積分に帰着される．

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta d\theta}{(2+\sin\theta)\cos\theta}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{2+\sin\theta}$$

$t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ とさらに置換すると

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)\right]_{-1}^{1}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{3}+\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\boxed{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$$

(2) 部分積分と，$\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}=0$ に注意すると

$$\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}\,dx=\left[-x^2e^{-x}\right]_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=2\left[-xe^{-x}\right]_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=2\left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty}=\boxed{2}$$

(3) 部分積分と部分分数分解を使う．また，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{Tan}^{-1}x}{x}=0$ であることに注意すると

$$\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{Tan}^{-1}x}{x^2}\,dx=\left[-\frac{\mathrm{Tan}^{-1}x}{x}\right]_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)}=\frac{\pi}{4}+\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$$
$$=\frac{\pi}{4}+\left[\log x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_1^{+\infty}=\frac{\pi}{4}+\left[\log\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]_1^{+\infty}=\frac{\pi}{4}+\left[\log\frac{1}{\sqrt{x^{-2}+1}}\right]_1^{+\infty}$$

となり，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^{-2}+1}}=1$ だから，求める広義積分の値は，$\boxed{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\log2}$

Ⅱ $x\geqq e$ の範囲で $\log x\geqq1$ より，$\dfrac{\log x}{x^\alpha}\geqq\dfrac{1}{x^\alpha}$ が成り立つ．$0<\alpha\leqq1$ の範囲であれば，$\boxed{1}$(2) と同様に，$\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ は発散する．従って要点 2 を使えば，与えられた広義積分も発散する．($[1,+\infty)$ 全体で $\dfrac{\log x}{x^\alpha}\geqq\dfrac{1}{x^\alpha}$ が成り立つわけではないので）少し丁寧に書くと，

$$\int_1^{+\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}dx=\int_1^{e}\frac{\log x}{x^\alpha}\,dx+\int_e^{+\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}\,dx$$

と分割することにより，第 1 項は通常の積分であり，第 2 項が広義積分となる．第 2 項に要点 2 を用いることにより，発散とわかる．

一方，$\alpha>1$ の範囲であれば，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1-\alpha}\log x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log x}{x^{\alpha-1}}=0$ であることに注意すると，

$$\int_1^{+\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}\,dx=\left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\log x\right]_1^{\infty}-\frac{1}{1-\alpha}\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$$

となるから，$\boxed{1}$(2) により収束する．値は，$\dfrac{1}{(\alpha-1)^2}$ になる．

よって，広義積分が収束する α の範囲は，$\boxed{\alpha>1}$