数学演習第二 （演習第３回）

線形：ベクトル空間・部分空間　2026 年 10 月 28 日

要点 1：部分空間の定義と条件

（$\mathbb{R}$ 上の）ベクトル空間 V (線形教科書 p.102–103) の空でない部分集合 W が (V の和・実数倍に関して) ベクトル空間となるとき, W は V の**部分空間**であるという．これは次の 3 条件をすべてみたすことと同値である．（線形教科書 命題 15.2）

(i) $\boldsymbol{0} \in W$.　(ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W \Rightarrow \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in W$.　(iii) $\boldsymbol{a} \in W, k \in \mathbb{R} \Rightarrow k\boldsymbol{a} \in W$.

なお，(ii), (iii) の下で (i) は $W \neq \varnothing$ と同値である．

要点 2：生成される部分空間 (線形教科書 p.108–110)

ベクトル空間 V において, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \in V$ の 1 次結合全体の集合

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle = \{c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r \mid c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{R}\}$$

は，V の部分空間となる．これを $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ によって**生成される部分空間**という．

V が列ベクトル空間 $\mathbb{R}^m$ のとき，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して,

$\boldsymbol{b} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle$　$\Leftrightarrow$　$c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$ を用いて $\boldsymbol{b} = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r$ と表せる．

（$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の 1 次結合であるという．）

$$\Leftrightarrow \quad \text{連立 1 次方程式 } [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \text{ が解を持つ.}$$

$$\overset{\text{線形教科書 定理 8.4}}{\Leftrightarrow} \quad \operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r] = \operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \mid \boldsymbol{b}].$$

なお, 複数のベクトル $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s$ が $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle$ に属するか調べる場合, $[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \mid \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s]$ を行基本変形し，$r+j$ 列に着目して $\operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \mid \boldsymbol{b}_j]$ を読み取るのが早い．

なお行列の列ベクトル分解は，線形教科書では $[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \ldots\ \boldsymbol{a}_r]$ とカンマを入れない記法を使用している．

要点 3：2 つの部分空間の共通部分と和空間 (線形教科書 p.110–111)

ベクトル空間 V の 2 つの部分空間 W_1, W_2 に対し,

$$W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \boldsymbol{v} \in W_1 \text{ かつ } \boldsymbol{v} \in W_2\} \quad (W_1, W_2 \text{ の}\textbf{共通部分}),$$
$$W_1 + W_2 = \{\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \mid \boldsymbol{w}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{w}_2 \in W_2\} \quad (W_1, W_2 \text{ の}\textbf{和空間})$$

は, いずれも V の部分空間となる．

【演習中に扱う予定の問題】：1(1),2(3)(5),3(2)(3),4

1　$\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ と実数を成分とする 3 次行列 A をとる．次の $\mathbb{R}^3$ の部分集合 W_1, W_2, W_3 が $\mathbb{R}^3$ の部分空間となることを示せ.

(1)　$W_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = 0\}$

(2)　$W_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$

(3)　$W_3 = \{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ が解を持つ. }\}$

2 次のベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分集合 W が $\mathbb{R}^3$ の部分空間でないことを具体的な反例を挙げて示せ.

(1) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \geqslant 0 \text{ または } y \geqslant 0 \text{ または } z \geqslant 0 \right\}$ (2) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x, y, z \text{ は整数} \right\}$

(3) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 = z^2 \right\}$ (4) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; xyz = 0 \right\}$

(5) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x + 2y + 2z = 5 \\ x - 4y + 2z = -1 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{array} \right\}$

3 次のベクトル空間 $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ または $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W に対して, 与えられた $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が W に属するか判定せよ. ただし, (3) については $\boldsymbol{v} \in W$ となるための a, b, c の条件を求めよ.

(1) $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

(2) $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 13 \\ 4 \\ -9 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$

(3) $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

(4) $W = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(5) $W = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

4

(1) $\mathbb{R}^2$ の部分空間

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 3t \\ 2t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

について, W_1, W_2, 共通部分 $W_1 \cap W_2$, 和集合 $W_1 \cup W_2$, 和空間 $W_1 + W_2$ をそれぞれ異なる xy 平面上に図示せよ. また, 和集合 $W_1 \cup W_2$ は $\mathbb{R}^2$ の部分空間でないことを確認せよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W_1 = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

について, $\mathbb{R}^3$ を xyz 座標を用いて表記した場合, W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$, 和空間 $W_1 + W_2$ は $\mathbb{R}^3$ 内のどのような図形になるか. すなわち, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1$, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_2$, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1 \cap W_2$, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1 + W_2$ となるとき, それぞれの x, y, z の関係を x, y, z の方程式で示し, その方程式が表す図形を答えよ.

演習第 3 回　レポート問題

(1) $\mathbb{R}^4$ の部分空間 $W = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ に対し，$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \in W$ となるための a, b の条件を求めよ．

(2) $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W_1 = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\rangle$$

について， $\mathbb{R}^3$ を xyz 座標を用いて表記した場合， $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$ は $\mathbb{R}^3$ 内のどのような図形になるか． すなわち， $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1$, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_2$, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1 \cap W_2$, となるとき，それぞれの x, y, z の関係を x, y, z の方程式で示し，その方程式が表す図形を答えよ．さらに，和集合 $W_1 \cup W_2$ が $\mathbb{R}^3$ の部分空間とならないことを具体的な反例を与えて示せ．