数学演習第二（演習第 3 回）　【解答例】

線形：ベクトル空間・部分空間　2026 年 10 月 28 日

1　部分空間の条件 (i),(ii),(iii) をチェックすればよい．あるいは線形教科書 命題 15.4 にあるように行列 A を係数行列とする同次連立 1 次方程式の解全体とみなせることをみれば，部分空間であることも言える．

(1)　(i)　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=0$ より $\boldsymbol{0}\in W_1$．(ii)　$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in W_1$ のとき，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_i=0$ $(i=1,2)$ だから，空間ベクトルの内積の分配法則により $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_2=0$ となる．よって $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2\in W_1$．(iii)　$\boldsymbol{x}\in W_1$ と $k\in\mathbb{R}$ に対し，$\boldsymbol{a}\cdot(k\cdot\boldsymbol{x})=k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})=k0=0$ より，$k\boldsymbol{x}\in W_1$．以上により，W_1 は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である．
《補足》 W_1 は，原点を通り，$\boldsymbol{a}$ に直交する平面である．$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ なら，W_1 は平面 $ax+by+cz=0$ であり，これは $\begin{bmatrix}a & b & c\end{bmatrix}$ を係数行列とする同次（連立）1 次方程式の解全体のなす部分空間とみなすこともできる．

(2)　(i)　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ だから $\boldsymbol{0}\in W_2$．(ii)　ベクトルの外積に関して，$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{y}$ が成り立つ．直接の成分計算なら，$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\x_3+y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_2(x_3+y_3)-a_3(x_2+y_2)\\a_3(x_1+y_1)-a_1(x_3+y_3)\\a_1(x_2+y_2)-a_2(x_1+y_1)\end{bmatrix}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{y}$ と示せる．これを用いると，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in W_2$ のとき，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{0}$ $(i=1,2)$ だから，$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}$ となって $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2\in W_2$．(iii)　$\boldsymbol{a}\times(k\boldsymbol{x})=k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x})$ も直接成分計算で示せる．すると $\boldsymbol{x}\in W_2$ なら $\boldsymbol{a}\times(k\boldsymbol{x})=k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x})=k\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ となって $k\boldsymbol{x}\in W_2$．以上により，W_2 は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である．
《補足 1》　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ は $\boldsymbol{x}=t\boldsymbol{a}$ $(t\in\mathbb{R})$ である．よって W_2 は原点を通り方向ベクトルが $\boldsymbol{a}$ の直線全体であり，これは $\mathbb{R}^3$ の部分空間である．
《補足 2》　$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ なら，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}bx_3-cx_2\\cx_1-ax_3\\ax_2-bx_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ と表せるから，上で示した外積の分配法則は，$\begin{bmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{bmatrix}$ を左から掛ける行列の積の分配法則に他ならない．また，W_2 は $\begin{bmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{bmatrix}$ を係数行列とする同次連立 1 次方程式の解全体のなす部分空間とみなすこともできる．

(3)　(i)　$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ という解を持つので，$\boldsymbol{0}\in W_3$．(ii)　$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\in W_3$ とすると，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1, A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2$ が解を持つ．その解を $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ とすると，$A(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=A\boldsymbol{x}_1+A\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2$ より，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2$ は $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ という解を持つ．よって，$\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2\in W_3$．(iii)　$\boldsymbol{b}\in W_3$ と $k\in\mathbb{R}$ をとる．$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持つので，その解を $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$ とすると，$A(k\boldsymbol{x}_0)=kA\boldsymbol{x}_0=k\boldsymbol{b}$ となるから，$A\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{b}$ は解 $\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{x}_0$ を持つ．よって $k\boldsymbol{b}\in W_3$．以上により，W_3 は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である．
《補足》 一般に，実数を成分とする $m\times n$ 行列 A に対し，$\{\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^m\mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ を持つ $\}$ は $\mathbb{R}^m$ の部分空間となる．さらに，$A=[\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n]$ と列ベクトル表示すると，$A\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{a}_i$ $(1\leqq i\leqq n)$ であることから，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持つことと $\boldsymbol{b}$ が A の列ベクトルの 1 次結合で表されることは同値であり，この部分空間は，A の列ベクトルで生成される部分空間（列空間）に一致し，さらにこれは A の定める線形写像の像と一致することを後の回で学ぶ．

2　部分空間の 3 つの条件のうち成り立たない反例を具体的に 1 つ示せばよい．

(1)　$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\in W$ だが，$-\boldsymbol{x}\notin W$．よって (iii) が満たされない．

(2)　$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\in W$ だが，$\dfrac{1}{2}\boldsymbol{x}\notin W$．よって (iii) が満たされない．

(3)　$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\in W$ だが，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ は $1^2+1^2=2\neq 2^2$ より W に含まれない．よって，(ii) が満たされない．

(4)　$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\in W$ だが，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ は W に含まれない．よって，(ii) が満たされない．

(5)　$\boldsymbol{0}\notin W$ により，(i) が満たされない．

3

(1) $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & -2 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right]$ より, $\boxed{\boldsymbol{v} \notin W,\ \boldsymbol{w} \in W}$

(2) $\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -3 & 13 & 13 \\ 2 & 3 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -9 & 7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -3 & 13 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & -22 & -24 \\ 0 & 1 & 5 & -22 & -6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -3 & 13 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & -22 & -24 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 18 \end{array}\right]$ より, $\boxed{\boldsymbol{v} \in W,\ \boldsymbol{w} \in W}$

(3) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 3 & 5 & 1 & b \\ 2 & 3 & 4 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -1 & 10 & b-3a \\ 0 & -1 & 10 & c-2a \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 1 & -10 & 3a-b \\ 0 & 0 & 0 & a-b+c \end{array}\right]$ より, $\boxed{\boldsymbol{v} \in W \ \Leftrightarrow\ a-b+c=0}$

(4) $\left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 6 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -10 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$ より, $\boxed{\boldsymbol{v} \in W,\ \boldsymbol{w} \notin W}$

(5) $\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

より, $\boxed{\boldsymbol{v} \notin W,\ \boldsymbol{w} \in W}$

4

(1) W_1 は直線 $y = \dfrac{2}{3}x$ (図 1). W_2 は直線 $y = -x$ (図 2). 共通部分 $W_1 \cap W_2$ は 2 直線の交点の原点のみ (図 3). 和集合 $W_1 \cup W_2$ は 2 直線 $y = \dfrac{2}{3}x$, $y = -x$ の合併 (図 4). 和空間 $W_1 + W_2$ は平面全体 (図 5). $\mathbb{R}^2$ の任意のベクトルが W_1, W_2 に平行なベクトルの和で書けることは明らか (与えられたベクトルを対角線とし, W_1, W_2 に平行な辺をもつ平行四辺形を考えよ).

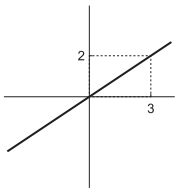

図 1. $W_1 : y = \dfrac{2}{3}x$

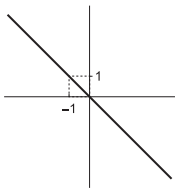

図 2. $W_2 : y = -x$

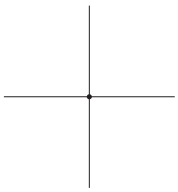
図 3. $W_1 \cap W_2$

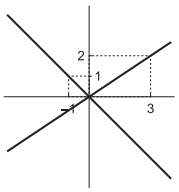

図 4. $W_1 \cup W_2$

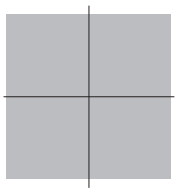
図 5. $W_1 + W_2$

また, $W_1 \cup W_2$ が $\mathbb{R}^2$ の部分空間とならないことは, $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ が直線 $W_1 : y = \dfrac{2}{3}x$ 上にも直線 $W_2 : y = -x$ 上にもないため, $W_1 \cup W_2$ に属さないことからわかる.

(2) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1$ となる条件は, $\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & -5 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & -6 & -x+z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & 0 & 2x+3y+z \end{array}\right]$ より, $2x+3y+z=0$. つまり, W_1 は平面 $2x + 3y + z = 0$ を表している. 別の見方をすると, $W_1 = \{c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ は, $\mathbb{R}^3$ 内で $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ によって張られる平面であるから, $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} /\!/ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ を法線ベクトルとし, 原点を通る平面 $2x + 3y + z = 0$ となる.

同様に, W_2 についても, $\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 2 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -x+y \\ 0 & 2 & x+z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -x+y \\ 0 & 0 & 3x-2y+z \end{array}\right]$ より, W_2 は平面 $3x - 2y + z = 0$. 外積 $\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ からもわかる.

共通部分 $W_1 \cap W_2$ は連立 1 次方程式 $\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$ の解全体に一致するから, $\left[\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 13 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & \frac{5}{13} \\ 0 & 1 & \frac{1}{13} \end{array}\right]$ から, $W_1 \cap W_2$ に属する元は $k\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 13 \end{bmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$ とな

る．これは，原点を通り，方向ベクトル $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -13 \end{bmatrix}$ の直線 $\dfrac{x}{5} = y = \dfrac{z}{-13}$ である．別の見方をすると，2つの平面 W_1, W_2 の交線は，W_1, W_2 の法線ベクトル $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4$ のいずれとも垂直であるから，$(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \times (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ -26 \end{bmatrix} /\!/ \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -13 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとし，原点を通る直線 $\dfrac{x}{5} = y = \dfrac{z}{-13}$ となる．

また，$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & 1 & 1 & y \\ 1 & -5 & -1 & 2 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 2 & 1 & x+y \\ 0 & -6 & -2 & 2 & -x+z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 2 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 2x+3y+z \end{array}\right]$ から，$\mathbb{R}^3$ のどんなベクトルも $W_1 + W_2 = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 \rangle$ に属することがわかるので，$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$．なお，$W_1 \cup W_2$ が $\mathbb{R}^3$ の部分空間とならないことは，$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ が平面 $W_1 : 2x + 3y + z = 0$ 上にも平面 $W_2 : 3x - 2y + z = 0$ 上にもないため，$W_1 \cup W_2$ に属さないことからわかる．

レポート問題の解答例

(1)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & a \\ 5 & 2 & -5 & b \\ -4 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & a-2 \\ 0 & -3 & -5 & b-5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & a+4 \\ 0 & 0 & 1 & b+1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-9b-5 \end{array}\right]$$

より，$\boldsymbol{v} \in W$ となる条件は，$\boxed{a - 9b - 5 = 0}$

(2)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 2 & 1 & y \\ -4 & 3 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & -5 & y-2x \\ 0 & 15 & z+4x \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & -5 & y-2x \\ 0 & 0 & -2x+3y+z \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & x \\ 1 & 3 & y \\ -1 & 5 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y \\ 0 & -3 & x-2y \\ 0 & 8 & z+y \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y \\ 0 & -3 & x-2y \\ 0 & 0 & \frac{8}{3}x - \frac{13}{3}y + z \end{array}\right]$$

より，$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1$ となる条件は，$\boxed{-2x + 3y + z = 0}$ となる．これは，$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \\ -5 \end{bmatrix}$ からも確かめられ，$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ に垂直で原点を通る平面を表す．$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_2$ となる条件は，$\boxed{8x - 13y + 3z = 0}$ となる．これは，$\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 8 \\ -13 \\ 3 \end{bmatrix}$ からも確かめられ，$\begin{bmatrix} 8 \\ -13 \\ 3 \end{bmatrix}$ に垂直で原点を通る平面を表す．

共通部分 $W_1 \cap W_2$ に属する条件は，連立1次方程式 $\begin{cases} -2x + 3y + z &= 0 \\ 8x - 13y + 3z &= 0 \end{cases}$ を解く．

$$\left[\begin{array}{ccc} -2 & 3 & 1 \\ 8 & -13 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc} -2 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & -7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -7 \end{array}\right]$$

より，$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1 \cap W_2$ となる条件は，$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$ となる．原点を通り，方向ベクトルが $\begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ の直線であり，方程式 $\boxed{\dfrac{x}{11} = \dfrac{y}{7} = z}$ で表される．これは，$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \times (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4) = \begin{bmatrix} 22 \\ 14 \\ 2 \end{bmatrix}$ からも確かめられる．平面 W_1, W_2 の交線は，$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4$ の両方に垂直であることから，この計算を用いて $W_1 \cap W_2$ の方程式を求めてもよい．

和集合 $W_1 \cup W_2$ について，W_1, W_2 に属する零でないベクトルとして，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in W_1, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix} \in W_2$ を

とれば，$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{14}{3}\end{bmatrix}$ は W_1, W_2 どちらの条件も満たさないので，$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2 \notin W_1 \cup W_2$ である．もちろん，$\boxed{4}$ の解説と同じように $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}3\\3\\-5\end{bmatrix} \notin W_1, W_2$ であることを挙げてもよい．

《補足》　和空間 W_1+W_2 についても $\boxed{4}$ と同じ確認をしておく．

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&3&2&3&x\\2&1&1&3&y\\-4&3&-1&5&z\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&3&2&3&x\\0&-5&-3&-3&y-2x\\0&15&7&17&z+4x\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&3&2&3&x\\0&-5&-3&-3&y-2x\\0&0&-2&8&z+3y-2x\end{array}\right]$$

から，$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{a}_3+c_4\boldsymbol{a}_4=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ は常に解を持つので，$W_1+W_2=\mathbb{R}^3$ となっている．