数学演習第二 （演習第 4 回）

微積：偏微分・合成関数の微分　2026 年 11 月 4 日

要点 1：多変数関数の極限と偏微分 (微積教科書 p.80-81,83)

〈多変数関数の極限と連続性〉　xy 平面上の点 (x,y) を点 (a,b) に（$(x,y)\neq(a,b)$ をみたしながら）どのように近づけても関数 $f(x,y)$ の値が l に近づくとき，l を関数 $f(x,y)$ の点 (a,b) における極限 (値) といい，$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=l$ と表す．$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$ が成り立つとき，$f(x,y)$ は (a,b) で連続であるという．

〈偏微分と偏導関数〉　関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で x に関して**偏微分可能**であるとは, $y=b$ と固定した 1 変数関数 $f(x,b)$ の $x=a$ で微分可能であることをいう．1 変数関数 $f(x,b)$ の $x=a$ における微分係数を，点 (a,b) における $f(x,y)$ の x に関する**偏微分係数**といい $f_x(a,b)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ のように記す．(a,b) に対して $f_x(a,b)$ を対応させる関数 $f_x(x,y)$ を $f(x,y)$ の x に関する**偏導関数**といい, $f_x(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ のように記す．y に関する偏微分可能性, 偏微分係数, 偏導関数も同様に定義する．

$f(x,y)$ は x,y で偏微分可能で, f_x, f_y がともに連続であるとき，f は C^1 級であるという．

〈接平面〉　$f(x,y)$ が C^1 級のとき，曲面 $S: z=f(x,y)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,b,f(a,b))$ における S の接平面の方程式は次で与えられる：$\boxed{z-f(a,b)=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)}$

〈ヤコビアン〉 (微積教科書 p.87)　C^1 級関数 $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ に対し，x,y の u,v に関するヤコビアンを $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}$ で定義する．det は行列式を表す．

例 1　$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2-2y^2}{x^2+2y^2}$ は，以下のように $x=0$ と $y=0$ に沿った極限が異なるので，極限は存在しない．

$$\lim_{x=0,\,y\to0}\frac{3x^2-2y^2}{x^2+2y^2}=\lim_{y\to0}\frac{-2y^2}{2y^2}=-1,\qquad \lim_{y=0,\,x\to0}\frac{3x^2-2y^2}{x^2+2y^2}=\lim_{x\to0}\frac{3x^2}{x^2}=3$$

例 2　$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-3x^2y^2}{2x^2+y^2}$ は，以下のように $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ と極座標で表示すると，θ に依存せず $4r^2$ で押さえられるので，$(x,y)\to(0,0)$ のとき，$r\to0$ であることから極限値は 0 となる．

$$\left|\frac{x^4-3x^2y^2}{2x^2+y^2}\right| \overset{\text{分母を小さく}}{\leqslant} \left|\frac{x^4-3x^2y^2}{x^2+y^2}\right| = r^2|\cos^4\theta-3\cos^2\theta\sin^2\theta|\leqslant 4r^2$$

最後の不等号は三角不等式 $|\cos^4\theta-3\cos^2\theta\sin^2\theta|\leqslant|\cos^4\theta|+|3\cos^2\theta\sin^2\theta|\leqslant 4$ とみる．

要点 2：高次偏導関数 (微積教科書 p.92-93)

偏導関数 $f_x(x,y)$ 自身も x,y の関数とみて，$f_x(x,y)$ が x,y で偏微分可能なとき, x に関する偏導関数 $f_{xx}(x,y)(=(f_x)_x(x,y))$，$y$ に関する偏導関数 $f_{xy}(x,y)(=(f_x)_y(x,y))$ が定義できる．f_{xx}，f_{xy} はそれぞれ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\right)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\right)$ とも書ける．同様に $f_y(x,y)$ が偏微分可能ならば $f_{yy}(x,y)\left(\text{または }\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$，$f_{yx}(x,y)\left(\text{または }\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)$ が定義できる．同様に $f_{xxx}, f_{xyx},\ldots$ のように高次の偏導関数も定義できる．

$f(x,y)$ の n 次以下のすべての偏導関数が連続であるとき，f は C^n 級であるという．次の定理から C^n 級なら n 次以下の偏導関数は偏微分の順序によらず x,y それぞれで偏微分した回数のみで決まる．

定理 (微積教科書 定理 4.3.1)：ある領域で f_{xy} と f_{yx} がともに存在して連続ならば, その領域で $f_{xy}=f_{yx}$.

要点 3：合成関数の微分法（連鎖律）(微積教科書 p.86)

関数 $f(x,y)$ は C^1 級であるとする．

1° $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ を考える．$\varphi(t),\psi(t)$ が微分可能であるとき合成関数 $z=f(\varphi(t),\psi(t))$ に関して次が成立する:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\psi}{dt}=f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t).$$

2° $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ を考える．$\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ が C^1 級であるとき合成関数 $z=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ に関して次の関係が成立する．

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial u}=f_x(\varphi(u,v),\psi(u,v))\varphi_u(u,v)+f_y(\varphi(u,v),\psi(u,v))\psi_u(u,v),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial v}=f_x(\varphi(u,v),\psi(u,v))\varphi_v(u,v)+f_y(\varphi(u,v),\psi(u,v))\psi_v(u,v).$$

例 3

(1°) $z=\log(x^2+2y^2+1)$, $x=t^2$, $y=-t$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\frac{2x}{x^2+2y^2+1}\cdot(2t)+\frac{4y}{x^2+2y^2+1}\cdot(-1)\\&=\frac{2t^2}{t^4+2t^2+1}\cdot(2t)+\frac{-4t}{t^4+2t^2+1}\cdot(-1)=\frac{4t(t^2+1)}{(t^2+1)^2}=\frac{4t}{t^2+1}.\end{aligned}$$

(2°) $z=e^{xy}$, $x=-u^2v$, $y=u+v^2$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=ye^{xy}\cdot(-2uv)+xe^{xy}\cdot 1\\&=\left\{-u^2v-2uv(u+v^2)\right\}e^{-u^2v(u+v^2)}=-uv\left(3u+2v^2\right)e^{-u^2v(u+v^2)}.\end{aligned}$$

【演習中に扱う予定の問題】：1(2)(4),2(1)(i),(2)(iii),3(1),(2)(i),4(1),5(1)

1 次の関数 $f(x,y)$ について, 1 次と 2 次の偏導関数 $(f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy})$ を全て求めよ.

(1) $f(x,y)=x^2y-3xy^2$　　(2) $f(x,y)=\sqrt{2x^3+y^2}$　　(3) $f(x,y)=x^y$

(4) $f(x,y)=\cos(xy)$　　(5) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$

2

(1) $f(x,y)$ に 1 変数関数 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ を合成した 1 変数関数 $g(t)=f(\varphi(t),\psi(t))$ に対し，合成関数の微分法（**要点 3-**1°）を用いて $g'(t)$ を求めよ.

(i) $f(x,y)=xy+y^2$, $\varphi(t)=t^4$, $\psi(t)=\dfrac{1}{t}$

(ii) $f(x,y)=x^2+xy+y^2$, $\varphi(t)=\cos t$, $\psi(t)=\sin t$

(2) $f(x,y)$ に 2 変数関数 $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ を合成した 2 変数関数 $g(u,v)=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ に対して，合成関数の微分法（**要点 3-**2°）を用いて，g_u, g_v を求めよ.

(iii) $f(x,y)=x^2+xy-y^2$, $\varphi(u,v)=u+v$, $\psi(u,v)=u-v$

(iv) $f(x,y)=x^2+y^2$, $\varphi(u,v)=\sin u\cos v$, $\psi(u,v)=\cos u\cos v$

3

(1) $f(x,y)$，$\varphi(x)$ をいずれも C^2 級とするとき，$h(x)=f(x,\varphi(x))$ に対し，$h''(x)$ を求めよ．

(2) $f(x,y)$ を C^2 級とし，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とする．$z(r,\theta)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とするとき，（$r>0$ の範囲で）次を $z_r, z_\theta, z_{rr}, z_{\theta\theta}$ を用いて表す関係式を求めよ．

(i) $(f_x)^2+(f_y)^2$　　(ii) $f_{xx}+f_{yy}$

4 次の変換のヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ．

(1) $x=u\cos v$，$y=u\sin v$　　(2) $x+y=u$，$x-y=v$

5 次の曲面の，与えられた点における接平面の方程式を求めよ．

(1) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$　　$(1,1,\sqrt{2})$　　(2) $z=e^{x^2+2xy}$　　$(-2,1,1)$

6 次の 2 変数関数 $f(x,y)$ について，3 種類の極限値

(a) $\lim\limits_{y\to0}\Big(\lim\limits_{x\to0} f(x,y)\Big)$　　(b) $\lim\limits_{x\to0}\Big(\lim\limits_{y\to0} f(x,y)\Big)$　　(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

がそれぞれ存在するか否かを調べよ．つまり，存在すれば，その値を計算し，そうでなければ，その理由を述べよ．

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^3-y^2}{x^2+y^2}$　　(2) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

(3) $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$　　(4) $f(x,y)=\begin{cases} x\cos\left(\dfrac{1}{y}\right) & (y\neq0) \\ 0 & (y=0) \end{cases}$

演習第 4 回　レポート問題

$f(x,y)=\mathrm{Sin}^{-1}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+y^2+2}\right)$ とする．

(1) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $(x,y,z)=\left(1,1,\dfrac{\pi}{6}\right)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) $a(t)=2t+1, b(t)=e^{t^2-t}$ とし，$z(t)=f(a(t),b(t))$ とする．合成関数の微分法を用いて，$t=0$ における微分係数 $z'(0)$ の値を求めよ．

(3) $\varphi(u,v)=u^2-v$，$\psi(u,v)=u-v$ とする．$x=\varphi(u,v)$，$y=\psi(u,v)$ に対するヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ．

(4) (3) の φ,ψ を用いて，$g(u,v)=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ とする．合成関数の微分法を用いて，$(u,v)=(2,1)$ における偏微分係数 $g_u(2,1)$，$g_v(2,1)$ の値を求めよ．