# 数学演習第二（演習第 4 回）　【解答例】

微積：偏微分・合成関数の微分　2026 年 11 月 4 日

## 1

(1) $f_x(x,y) = 2xy - 3y^2$,　$f_y(x,y) = x^2 - 6xy$,
$f_{xx}(x,y) = 2y$,　$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2x - 6y$,　$f_{yy}(x,y) = -6x$.

(2) $f_x(x,y) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{2x^3+y^2}}$,　$f_y(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{2x^3+y^2}}$,
$f_{xx}(x,y) = \dfrac{3x^4+6xy^2}{(2x^3+y^2)^{\frac{3}{2}}}$,　$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -\dfrac{3x^2y}{(2x^3+y^2)^{\frac{3}{2}}}$,　$f_{yy}(x,y) = \dfrac{2x^3}{(2x^3+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(3) $f_x(x,y) = yx^{y-1}$,　$f_y(x,y) = x^y \log x$,
$f_{xx}(x,y) = y(y-1)x^{y-2}$,　$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = x^{y-1}(y\log x + 1)$,　$f_{yy}(x,y) = x^y(\log x)^2$.

(4) $f_x(x,y) = -y\sin(xy)$,　$f_y(x,y) = -x\sin(xy)$,
$f_{xx}(x,y) = -y^2\cos(xy)$,　$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -\sin(xy) - xy\cos(xy)$,　$f_{yy}(x,y) = -x^2\cos(xy)$.

(5) $(x,y) \neq (0,0)$ のとき，$(x^2+y^2)f = x^3y - xy^3$ の両辺を $x$ で偏微分すると，$2xf + (x^2+y^2)f_x = 3x^2y - y^3$，$(x^2+y^2)^2 f_x = (3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - 2x^2y(x^2-y^2)$ より，$f_x(x,y) = \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ が従う．同様にして，$f_y(x,y) = \dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ を得る．また，$x \neq 0$ で $f(x,0) = 0$，$y \neq 0$ で $f(0,y) = 0$ だから，$\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}, \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}$ はいずれも 0 なので，偏微分の定義から，$(x,y) = (0,0)$ における偏微分係数は $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ となる．

次に，2 次偏導関数を計算する．$(x,y) \neq (0,0)$ のとき，$(x^2+y^2)^2 f_x = y(x^4+4x^2y^2-y^4)$ の両辺を $x$ で偏微分すると，$4x(x^2+y^2)f_x + (x^2+y^2)^2 f_{xx} = 4xy(x^2+2y^2)$，$(x^2+y^2)^3 f_{xx} = 4xy\{(x^2+2y^2)(x^2+y^2) - (x^4+4x^2y^2-y^4)\}$ より，$f_{xx}(x,y) = \dfrac{4xy^3(-x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$ を得る．同様にして，$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \dfrac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3} = \dfrac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3}$，$f_{yy}(x,y) = \dfrac{4x^3y(-3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3}$．$(0,0)$ での値を求めるために，上の計算結果から，$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$，$f_x(x,0) = 0$ $(x \neq 0)$，$f_x(0,y) = -y$ $(y \neq 0)$，$f_y(x,0) = x$ $(x \neq 0)$，$f_y(0,y) = 0$ $(y \neq 0)$ であることに注意する．これらを用いて，$\dfrac{f_x(x,0)-f_x(0,0)}{x} = 0$，$\dfrac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y} = -1$，$\dfrac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x} = 1$，$\dfrac{f_y(0,y)-f_y(0,0)}{y} = 0$ となるから，偏微分の定義によって，$f_{xx}(0,0) = 0$，$f_{xy}(0,0) = -1$，$f_{yx}(0,0) = 1$，$f_{yy}(0,0) = 0$ となる．

《補足》　$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ なので，$f(x,y)$ は（$(0,0)$ を除いた領域で $C^2$ 級であるが）$(0,0)$ の近傍で $C^2$ 級でない．$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ だが，極限値 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_{xx}(x,y)$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_{xy}(x,y)$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_{yy}(x,y)$ はいずれも存在しない．例えば，$f_{xx}(0,y) = 0$ $(y \neq 0)$ と $f_{xx}(x,x) = 1$ $(x \neq 0)$ から，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_{xx}(x,y)$ は存在しないことがわかる．また，$f_{xy}(x,0) = 1, f_{xy}(0,y) = -1$ $(x,y \neq 0)$ から $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_{xy}(x,y)$ が存在しないことがわかる．ここでの $f(x,y)$ はイタリアの数学者ペアノ (Giuseppe Peano, 1858–1932) の有名な一例である．

## 2

(1)　(i)　$f_x(x,y) = y$,　$f_y(x,y) = x + 2y$,　$\varphi'(t) = 4t^3$,　$\psi'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$ より，$z = g(t)$ とおくと，

$$g'(t) = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\psi}{dt} = f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)$$
$$= \psi(t)\cdot 4t^3 + (\varphi(t) + 2\psi(t))\left(-\frac{1}{t^2}\right) = \frac{1}{t}\cdot 4t^3 - \left(t^4 + \frac{2}{t}\right)\frac{1}{t^2} = \boxed{3t^2 - \frac{2}{t^3}}$$

(ii)　$f_x(x,y) = 2x + y$,　$f_y(x,y) = x + 2y$,　$\varphi'(t) = -\sin t$,　$\psi'(t) = \cos t$ より，$z = g(t)$ とおくと，

$$g'(t) = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\psi}{dt} = f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)$$
$$= (2\varphi(t) + \psi(t))(-\sin t) + (\varphi(t) + 2\psi(t))\cos t$$
$$= -(2\cos t + \sin t)\sin t + (\cos t + 2\sin t)\cos t = \boxed{\cos^2 t - \sin^2 t\,(= \cos 2t)}$$

(2) (iii) $f_x(x,y)=2x+y,\ f_y(x,y)=x-2y,\ \varphi_u(u,v)=1,\ \psi_u(u,v)=1$ より, $z=g(u,v)$ とおくと,

$$\begin{aligned} g_u(u,v)=\frac{\partial z}{\partial u}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial u}=f_x(\varphi(u,v),\psi(u,v))\varphi_u(u,v)+f_y(\varphi(u,v),\psi(u,v))\psi_u(u,v)\\ &=(2\varphi(u,v)+\psi(u,v))\cdot 1+(\varphi(u,v)-2\psi(u,v))\cdot 1=3\varphi(u,v)-\psi(u,v)\\ &=3(u+v)-(u-v)=\boxed{2u+4v} \end{aligned}$$

同様に, $g_v=f_x\varphi_v+f_y\psi_v=(3u+v)\cdot 1+(-u+3v)\cdot(-1)=\boxed{4u-2v}$.

(iv) $f_x(x,y)=2x,\ f_y(x,y)=2y,\ \varphi_u(u,v)=\cos u\cos v,\ \psi_u(u,v)=-\sin u\cos v$ より, $z=g(u,v)$ とおくと,

$$\begin{aligned} g_u(u,v)=\frac{\partial z}{\partial u}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial u}=f_x(\varphi(u,v),\psi(u,v))\varphi_u(u,v)+f_y(\varphi(u,v),\psi(u,v))\psi_u(u,v)\\ &=2\varphi(u,v)\cos u\cos v+2\psi(u,v)(-\sin u\cos v)\\ &=2\sin u\cos v\cos u\cos v-2\cos u\cos v\sin u\cos v=\boxed{0} \end{aligned}$$

同様に, $g_v=f_x\varphi_v+f_y\psi_v=2(\sin u\cos v)\cdot(-\sin u\sin v)+2\cos u\cos v(-\cos u\sin v)=\boxed{-\sin 2v}$

**3** (1) は**要点 3-**1°, (2) は**要点 3-**2° を用いて計算する.

(1)

$$h'(x)=\frac{d}{dx}f(x,\varphi(x))=f_x(x,\varphi(x))+f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)$$

$$\begin{aligned} h''(x)=\frac{d}{dx}h'(x)&=f_{xx}(x,\varphi(x))+f_{xy}(x,\varphi(x))\varphi'(x)+f_{yx}(x,\varphi(x))\varphi'(x)+f_{yy}(x\varphi(x))\{\varphi'(x)\}^2+f_y(x,\varphi(x))\varphi''(x)\\ &=\boxed{f_{xx}(x,\varphi(x))+2f_{xy}(x,\varphi(x))\varphi'(x)+f_{yy}(x,\varphi(x))\{\varphi'(x)\}^2+f_y(x,\varphi(x))\varphi''(x)} \end{aligned}$$

(2)

(i) $z_r=f_xx_r+f_yy_r=f_x\cos\theta+f_y\sin\theta$ と $z_\theta=f_xx_\theta+f_yy_\theta=f_x(-r\sin\theta)+f_y(r\cos\theta)$ から,

$$(z_r)^2+\left(\frac{z_\theta}{r}\right)^2=(f_x\cos\theta+f_y\sin\theta)^2+(-f_x\sin\theta+f_y\cos\theta)^2=(f_x)^2+(f_y)^2$$

となるので, $\boxed{(f_x)^2+(f_y)^2=(z_r)^2+\frac{1}{r^2}(z_\theta)^2}$

(ii) $f$ が $C^2$ 級であることから, $f_{xy}=f_{yx}$ となることに注意して, 連鎖律を用いると,

$$\begin{aligned} z_{rr}&=(f_{xx}x_r+f_{xy}y_r)\cos\theta+(f_{yx}x_r+f_{yy}y_r)\sin\theta=f_{xx}\cos^2\theta+2f_{xy}\cos\theta\sin\theta+f_{yy}\sin^2\theta\\ z_{\theta\theta}&=(f_{xx}x_\theta+f_{xy}y_\theta)(-r\sin\theta)-f_xr\cos\theta+(f_{yx}x_\theta+f_{yy}y_\theta)r\cos\theta+f_y(-r\sin\theta)\\ &=f_{xx}r^2\sin^2\theta+2f_{xy}r^2\sin\theta\cos\theta+f_{yy}r^2\cos^2\theta-rz_r \end{aligned}$$

より, $z_{rr}+\dfrac{z_{\theta\theta}+rz_r}{r^2}=f_{xx}+f_{yy}$, すなわち, $\boxed{f_{xx}+f_{yy}=z_{rr}+\frac{1}{r^2}z_{\theta\theta}+\frac{1}{r}z_r}$

《注意》 (i) から $f_x=z_r\cos\theta-\dfrac{\sin\theta}{r}z_\theta$, $f_y=z_r\sin\theta+\dfrac{\cos\theta}{r}z_\theta$ と解いて連鎖律を使うこともできる.

**4**

(1) $\dfrac{\partial x}{\partial u}=\cos v,\ \dfrac{\partial x}{\partial v}=-u\sin v,\ \dfrac{\partial y}{\partial u}=\sin v,\ \dfrac{\partial y}{\partial v}=u\cos v$ より,

$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{pmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{pmatrix}=u\cos^2 v+u\sin^2 v=\boxed{u}$.

(2) $x,y$ について解くと, $x=\dfrac{u+v}{2}, y=\dfrac{u-v}{2}$.

$\dfrac{\partial x}{\partial u}=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\partial x}{\partial v}=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\partial y}{\partial u}=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\partial y}{\partial v}=-\dfrac{1}{2}$, より, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\boxed{-\dfrac{1}{2}}$.

**5** $z=f(x,y)$ とする.

(1) $f_x(x,y)=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\ f_y(x,y)=-\dfrac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ より $f_x(1,1)=f_y(1,1)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

よって求める接平面の方程式は $z-\sqrt{2}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-1)-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(y-1)$ を整理して $\boxed{x+y+\sqrt{2}\,z=4}$

(2) $f_x(x,y)=(2x+2y)e^{x^2+2xy}$ より $f_x(-2,1)=-2$. $f_y(x,y)=2xe^{x^2+2xy}$ より $f_y(-2,1)=-4$. よって求める接平面の方程式は $z-1=-2(x+2)-4(y-1)$ を整理して $\boxed{2x+4y+z=1}$

**6** 一般に, 3 種類の極限には論理的な関係はないので, $(a)$ の極限または $(b)$ の極限が存在しないことから, $(c)$ の極限が存在しないとは云えないし, $(c)$ の極限が存在しても, $(a)$ の極限や $(b)$ の極限が存在すると結論付けられない.

(1) $\lim_{y\to0}\Big(\lim_{x\to0}f(x,y)\Big)=\lim_{y\to0}(-1)=-1$, $\lim_{x\to0}\Big(\lim_{y\to0}f(x,y)\Big)=\lim_{x\to0}x=0$. 一方, $(x,y)$ を $x$ 軸に沿って原点に近づけたときの $f(x,y)$ の極限 $\lim_{x\to0}f(x,0)=0$ と $y$ 軸に沿って原点に近づけたときの極限 $\lim_{y\to0}f(0,y)=-1$ が異なるので $(c)$ の極限は存在しない.

(2) $\lim_{y\to0}\Big(\lim_{x\to0}f(x,y)\Big)=\lim_{y\to0}\dfrac{0}{y^2}=0$, $\lim_{x\to0}\Big(\lim_{y\to0}f(x,y)\Big)=\lim_{x\to0}\dfrac{0}{x^2}=0$. $(c)$ の極限を調べるには本問では平面の極座標 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ が有効で, このとき $(x,y)\to(0,0)$ は $r\to0$ と同じことなので, あたかも（$\theta$ をパラメータと見なして）$r$ の 1 変数関数のように扱える. 実際, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおくと, $f(x,y)=\cos\theta\sin\theta=(1/2)\sin2\theta$ は区間 $[-1/2,1/2]$ の任意の値を取り得るから, $(c)$ の極限は存在しない.

(3) $\lim_{y\to0}\Big(\lim_{x\to0}f(x,y)\Big)=\lim_{y\to0}\dfrac{0}{|y|}=0$, $\lim_{x\to0}\Big(\lim_{y\to0}f(x,y)\Big)=\lim_{x\to0}\dfrac{0}{|x|}=0$. $(c)$ の極限については (2) と同様に, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおいて, $|f(x,y)|=(r/2)|\sin2\theta|\leqq r/2\to0$ $(r\to0)$. よって, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

(4) $|f(x,y)|\leqq|x|\leqq\sqrt{x^2+y^2}$ から, $\lim_{y\to0}\Big(\lim_{x\to0}f(x,y)\Big)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$ がわかる. 一方, $x\neq0$ として, 例えば $y=1/n\pi$ $(n=1,2,3,\dots)$ を考えると, $n\to\infty$ のとき, $y=1/(n\pi)\to+0$ で, $f(x,1/(n\pi))=(-1)^nx$ なので, $\lim_{y\to0}f(x,y)$ $(x\neq0)$ は存在しない. よって, $(b)$ の極限は存在しない.

《補足》 例えば, **1** (5) では, $f(0,k)=0$ $(k\neq0)$ と $f_x(0,0)=0$ から

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{1}{k}\left\{\left(\lim_{h\to0}\frac{f(h,k)-f(0,k)}{h}\right)-f_x(0,0)\right\}=\lim_{k\to0}\Big(\lim_{h\to0}\frac{f(h,k)}{hk}\Big)$$

となり, 同様に $f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to0}\Big(\lim_{k\to0}\dfrac{f(h,k)}{hk}\Big)$ となるから, $(a)$ や $(b)$ の極限が自然に現れる.

$$\lim_{k\to0}\Big(\lim_{h\to0}\frac{f(h,k)}{hk}\Big)=\lim_{k\to0}\Big(\lim_{h\to0}\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}\Big)=-1,\quad \lim_{h\to0}\Big(\lim_{k\to0}\frac{f(h,k)}{hk}\Big)=\lim_{h\to0}\Big(\lim_{k\to0}\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}\Big)=1.$$

と値が異なることから, $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$ となっている.

一般に, $g(tx,ty)=g(x,y)$ $(t\neq0)$, $g(1,0)\neq g(0,1)$ をみたす $(x,y)\neq(0,0)$ での $C^2$ 級関数 $g(x,y)$ を用いて, $f(x,y)=xy\,g(x,y)$ $((x,y)\neq(0,0))$, $=0$ $((x,y)=(0,0))$ と定めれば, $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$ が成り立つ.

**レポート問題の解答例**

$$f_x = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2+1}{x^2+y^2+2}\right)^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2+1}{x^2+y^2+2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2+1}{x^2+y^2+2}\right)^2}} \cdot \frac{2x(x^2+y^2+2)-2x(x^2+1)}{(x^2+y^2+2)^2}$$

$$f_y = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2+1}{x^2+y^2+2}\right)^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2+1}{x^2+y^2+2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2+1}{x^2+y^2+2}\right)^2}} \cdot \frac{-2y(x^2+1)}{(x^2+y^2+2)^2}$$

(1) $f_x(1,1) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, $f_y(1,1) = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ より，接平面の方程式は，$z - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(x-1) - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(y-1)$．整理すると，

$$\boxed{x - y - 2\sqrt{3}z = -\frac{\sqrt{3}\pi}{3}}$$

(2) 合成関数の微分法から，$z'(t) = f_x a'(t) + f_y b'(t) = 2f_x + f_y(2t-1)e^{t^2-t}$．$t = 0$ のとき，$a(0) = 1, b(0) = 1$．

$z'(0) = 2f_x(1,1) - f_y(1,1) \overset{(1)}{=} \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

(3) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} 2u & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \boxed{1-2u}$

(4) $u = 2, v = 1$ のとき，$x = 3, y = 1$．$f_x(3,1) = \dfrac{1}{2\sqrt{11}}$, $f_y(3,1) = -\dfrac{5}{6\sqrt{11}}$．合成関数の微分法から

$$g_u = f_x x_u + f_y y_u = 2uf_x + f_y, \quad g_v = f_x x_v + f_y y_v = -f_x - f_y$$

$(u,v) = (2,1)$ を代入すると

$$g_u(2,1) = 4f_x(3,1) + f_y(3,1) = \boxed{\frac{7}{6\sqrt{11}}}, \quad g_v(2,1) = -f_x(3,1) - f_y(3,1) = \boxed{\frac{1}{3\sqrt{11}}}$$