数学演習第二 （演習第 5 回）

線形：1 次独立・1 次従属, 基底と次元　2026 年 11 月 11 日

要点 1：1 次独立・1 次従属の定義

ベクトル空間 V の元 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が **1 次独立**であるとは,

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0} \text{ ならば } c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$$

が成り立つときをいう．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が 1 次独立でないとき，**1 次従属**であるという．このとき,

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0} \text{ かつ } (c_1, c_2, \ldots, c_k) \neq (0, 0, \ldots, 0)$$

という関係式が存在する．これを**非自明な 1 次関係式**という．（なお「1 次」は「一次」と書くことも多い.）

V が列ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ やその部分空間の場合には,

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0} \iff [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \quad \cdots\cdots (*)$$

という表示の書き換えによって，1 次独立，1 次従属，非自明な 1 次関係式は次のように連立 1 次方程式と行列の階数に帰着される.

要点 2：列ベクトル空間（とその部分空間）における 1 次独立・1 次従属と非自明な 1 次関係式

- $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ が **1 次独立**

  $\iff$ 同次連立 1 次方程式 $(*)$ は自明な解のみをもつ．$\iff \operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k] = k$

- $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ が **1 次従属**

  $\iff$ 同次連立 1 次方程式 $(*)$ が非自明な解をもつ．$\iff \operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k] < k$

- $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ が 1 次従属であるとき, $(*)$ の非自明な解 $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ に対して $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$ が成立する．非自明な 1 次関係式は同次連立 1 次方程式 $(*)$ を解いて，一般解の中から非自明な解をひとつ選べば，非自明な 1 次関係式が得られる.

例 1　$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ について考える．行基本変形により,

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}.$$

よって, $\operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] = 3$ となり, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立．（$\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] \neq 0$ を示してもよい.）

例 2　$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ について考える．行基本変形により,

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -15 \\ 0 & -7 & -21 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -21 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって, $\mathrm{rank}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] = 2$ となり, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次従属. また, $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ の解は上の簡約行列から $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ (c は任意定数) と求められる. 非自明な解として例えば $c = 1$ の場合をとれば, 非自明な 1 次関係式 $2\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ が得られる.

要点 3：基底と次元

- ベクトル空間 V の元の組 $(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ が V の**基底**

  $\overset{\text{定義}}{\iff}$ 次の 2 つの条件を満たすこと:

  (i) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V を生成する. すなわち, $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle$.

  (ii) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立である.

  $\iff$ 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し, $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$ を満たす実数 $c_1, \ldots, c_n$ が一意的に存在.

  (「存在する」が条件 (i) に, 「一意的に」が条件 (ii) に対応する.)

  なお, 基底の記号は, 線形教科書では $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \ldots$ などを使うが, この演習では $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ も使う.

- ベクトル空間 V の基底の取り方は一意的ではないが, 基底をなすベクトルの個数は (有限個であれば) ただ 1 つに決まる. この個数をベクトル空間 V の **次元** といい, $\dim V$ で表す.

- $\mathbb{R}^n$ は n 次元なので, 基底は n 個のベクトルの組からなる.

  $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ が $\mathbb{R}^n$ の基底 $\Leftrightarrow$ $n \times n$ 行列 $[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ が正則 $\Leftrightarrow \det[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n] \neq 0$

  ($\mathrm{rank}[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n] = n$ のとき, (ii) がみたされる. さらに, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し, $[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n]\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は必ず解を持つ. よって $\mathbb{R}^n = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ であり, (i) も成り立つ.)

例 3 $W = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ とする.

例 2 でみたように $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]$ の簡約行列の 1, 2 列をみれば, $\mathrm{rank}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = 2$, すなわち $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ は 1 次独立であり, 条件 (ii) がみたされる.

また, $2\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ だから, $\boldsymbol{a}_3 = -2\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2$. よって, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合として表される元はすべて $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の 1 次結合に書き直せる. 従って, $W = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$ であり, 条件 (i) がみたされる.

以上により, $\dim W = 2$ であり, 基底として $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ がとれる.

例 4 $W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + \ x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{array} \right\}$ とする.

係数行列を簡約化すると, $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ となるから, 与えられた同次連立 1 次方程式の一般解は, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ と表せる.

よって, $W = \left\langle \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ となり, 2 つの基本解の組 $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ が条件 (i) をみたす. $\mathrm{rank}[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = 2$ となることは基本解の 3, 4 成分からわかるので, $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ は 1 次独立となり条件 (ii) が成り立つ.

以上により, $\dim W = 2$ で, 基底として $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ がとれる.

【演習中に扱う予定の問題】： 1(1),2(1),3,4 W_2, W_3,5(1)(2)

1 次のベクトルの組が 1 次独立かどうか判定し, 1 次従属の場合には, 非自明な 1 次関係式を 1 つ求めよ. (各問について, 与えられたベクトルを左から順に $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots$ と名付けて解け.) ［演習書 問題 11.3.1 より］

(1) $\begin{bmatrix}-1\\8\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-2\\-8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-6\\-7\\17\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\\-1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-3\\3\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\1\\1\\-2\end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$

2 ベクトル空間 V に属する 4 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が 1 次独立であるとする. 次のベクトルの組は 1 次独立か否かを判定せよ. 1 次従属の場合には, 非自明な 1 次関係式を 1 つ求めよ. (各問で与えられたベクトルを前から順に $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots$ とする.)

(1) $-\boldsymbol{a}_1 + 8\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3$, $3\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 - 8\boldsymbol{a}_3$, $-6\boldsymbol{a}_1 - 7\boldsymbol{a}_2 + 17\boldsymbol{a}_3$

(2) $-\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_4$

(3) $\boldsymbol{a}_1 + \alpha\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_2 + \alpha\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_3 + \alpha\boldsymbol{a}_1$ $(\alpha \in \mathbb{R}$: 定数)

3 次のベクトルの組のうち, $\mathbb{R}^3$ の基底になっているものをすべて答えよ.

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}\right), \quad \mathcal{B}_2 = \left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right), \quad \mathcal{B}_3 = \left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right),$$

$$\mathcal{B}_4 = \left(\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right), \quad \mathcal{B}_5 = \left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}\right), \quad \mathcal{B}_6 = \left(\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\-2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\5\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right).$$

4 次の 4 つの $\mathbb{R}^3$ の部分空間の基底と次元を求めよ.

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -x + 2y + 3z = 0 \right\}, \quad W_2 = \left\langle \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle,$$

$$W_3 = \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{r} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \\ x + 8y - 3z = 0 \end{array} \right\}, \quad W_4 = \left\{ \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{連立 1 次方程式} \\ \begin{cases} x + 2y + z = a \\ 2x + y + 4z = b \\ x + 8y - 3z = c \end{cases} \\ \text{が解をもつ} \end{array} \right\}$$

5 次で定義される $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W を考える.

$$W = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\-2\\1\\4\end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix}4\\-1\\3\\2\end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix}5\\4\\3\\-8\end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix}3\\1\\2\\0\end{bmatrix} \right\rangle$$

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の間に成り立つ非自明な 1 次関係式を 1 つ求めよ.

(2) 次のうち, W の基底となっているものをすべて選べ.

$$\mathcal{A}_1 = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3), \quad \mathcal{A}_2 = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4), \quad \mathcal{A}_3 = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4), \quad \mathcal{A}_4 = (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$$

(3) $\left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix}4\\-1\\3\\3\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}2\\3\\1\\-4\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix}9\\-4\\7\\10\end{bmatrix} \right)$ は W の基底であることを示せ.

演習第 5 回　レポート問題

(1) a を実数とする．$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} a \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする．$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ が 1 次従属となるための a の条件を求めよ．さらにそのとき，非自明な 1 次関係式を 1 つ求めよ．

(2) s を実数とする．$\mathbb{R}^4$ の部分空間 $W = \left\langle \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ s \\ 9 \end{bmatrix} \right\rangle$ に対し，$\dim W$ とその基底を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^4$ の部分空間 $U = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x + 4y - 2z + \ \ w = 0 \\ 3x + 6y - 3z - 4w = 0 \end{array} \right\}$ に対し，$\dim U$ とその基底を求めよ．