数学演習第二（演習第 5 回）　【解答例】

線形：1 次独立・1 次従属，基底と次元　2026 年 11 月 11 日

1

(1) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 8 & -2 & -7 \\ 2 & -8 & 17 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 22 & -55 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次従属で，非自明な 1 次関係式の 1 つは $\frac{3}{2}\boldsymbol{a}_1 + \frac{5}{2}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$. 分母を払って $3\boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ と表せば見やすい.

(3) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は 1 次従属で，非自明な 1 次関係式の 1 つは $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$. (もしくは，$\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$)

(5) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ より，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は 1 次独立.

(この変形の最後から 2 番目の行列を見れば，階数が 4 なので，この段階で 1 次独立とわかる.)

2　$\boldsymbol{b}_i$ たちの 1 次結合を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ に関して整理すると，$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$ の 1 次独立性から係数がすべて 0 となっていなければならない．すると同次連立 1 次方程式に帰着される.

(1) $c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 = c_1(-\boldsymbol{a}_1 + 8\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3) + c_2(3\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 - 8\boldsymbol{a}_3) + c_3(-6\boldsymbol{a}_1 - 7\boldsymbol{a}_2 + 17\boldsymbol{a}_3)$

$= (-c_1 + 3c_2 - 6c_3)\boldsymbol{a}_1 + (8c_1 - 2c_2 - 7c_3)\boldsymbol{a}_2 + (2c_1 - 8c_2 + 17c_3)\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$

とする．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立だから，$\begin{cases} -c_1 + 3c_2 - 6c_3 = 0 \\ 8c_1 - 2c_2 - 7c_3 = 0 \\ 2c_1 - 8c_2 + 17c_3 = 0 \end{cases}$．すなわち，連立 1 次方程式 $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 8 & -2 & -7 \\ 2 & -8 & 17 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ を得るが，1 (1) より，係数行列を簡約化すると $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となるので，解は $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ となる.

よって，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ は 1 次従属で，非自明な 1 次関係式 $3\boldsymbol{b}_1 + 5\boldsymbol{b}_2 + 2\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0}$ が成り立つ.

(2) (1) と同様に，$c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 + c_4\boldsymbol{b}_4 = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$. 1 (5) より係数行列を簡約化すると単位行列になるので，$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ となり，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ は 1 次独立.

(3) (1) と同様に，$c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$．係数行列を基本変形して，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -\alpha^2 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^3 + 1 \end{bmatrix}$．よって，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ は $\alpha = -1$ のとき 1 次従属で，非自明な 1 次関係式 $\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0}$ が成り立つ．また，$\alpha \neq -1$ のときは 1 次独立となる.

3　$\mathbb{R}^3$ は 3 次元なので，基底は 3 つのベクトルからなる．よって，$\mathcal{B}_1$ と $\mathcal{B}_6$ は基底ではない．また，$\mathcal{B}_3$ は $\boldsymbol{0}$ を含むので明らかに 1 次従属であり，基底でない．$\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5$ に対しては，行列式が 0 かどうかを調べればよい.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -9, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

であるから，$\mathbb{R}^3$ の基底となっているのは $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_4$ である.

4

- W_1 の元は $\begin{bmatrix} 2s+3t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(s,t \in \mathbb{R})$ と表せるので, $W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$. この 2 つの列ベクトルを並べると，第 2,3 成分に注目すれば階数 2 となる．従って，1 次独立だから, $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ が W_1 の基底で, $\dim W_1 = 2$.
- W_2 の 3 つのベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ と書く. $[\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2 \ \boldsymbol{a}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は 1 次独立で, 非自明な 1 次関係式 $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ $(\Leftrightarrow \boldsymbol{a}_3 = -\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2)$ が成り立つ. よって, $W_2 = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$ となり, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ が基底で, $\dim W_2 = 2$.
- W_3 については, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, W_3 の元は, $c\begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$ と表せる．従って，$\dim W_3 = 1$ で, 基底は $c = 3$ の場合の解をとって $\left(\begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$ がとれる.
- W_4 については, まず連立 1 次方程式が解を持つ条件を調べると $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 2 & 1 & 4 & b \\ 1 & 8 & -3 & c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -3 & 2 & -2a+b \\ 0 & 6 & -4 & -a+c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -3 & 2 & -2a+b \\ 0 & 0 & 0 & -5a+2b+c \end{bmatrix}$ より,$-5a+2b+c = 0$ となる．従って，$W_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -5a+2b+c = 0 \right\}$ となる．この部分空間の次元と基底は，W_1 と同様に $\dim W_4 = 2$ で, $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right)$ が基底となる.

《補足》 一般に, $m \times n$ 行列 $A = [\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n]$ に対し, $\{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{が解を持つ}\} \subset \mathbb{R}^m$ は, 第 7 回で見る A の列空間 $C(A) = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ に一致することが示せる．上の W_4 は，$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & -3 \end{bmatrix}$ の列ベクトルで生成される部分空間 $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \right\rangle$ と一致する．A は W_3 で扱った行列と同じであり，W_3 でみた簡約化の計算から, A の第 1 列と第 2 列のベクトルが $C(A)$ の基底となることがわかるので, $\dim W_4 = 2$ と基底 $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} \right)$ が得られる.

5

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -8 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -14 & -28 & -12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
より, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次従属で, 非自明な 1 次関係式 $3\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ が成り立つことがわかる.

(2) (1) から, $\mathcal{A}_1$ は基底にならない. 他方, 非自明な 1 次関係式を使うと, $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 = (c_1 - 3c_3)\boldsymbol{a}_1 + (c_2 + 2c_3)\boldsymbol{a}_2 + c_4\boldsymbol{a}_4$ と書き直せるので, $\mathcal{A}_2 = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4)$ は W を生成する. 同様に考えて, $\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$ はいずれも W を生成する. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ のどの 2 つ $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j$ をとっても $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_4$ は 1 次独立であることは，上の簡約化の $i, j, 4$ 列に注目すれば，$\operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_4] = 3$ となることからわかる．よって，$\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$ はいずれも W の基底となる.

(3) 基底の定義に従って次の 3 つの項目をチェックする: (i) $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ が 1 次独立. (ii) $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ が W に属する. (iii) $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ が W を生成する.

(i) $[\boldsymbol{b}_1 \ \boldsymbol{b}_2 \ \boldsymbol{b}_3] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 \\ -1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 3 & -4 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 14 & -7 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & 10 & -5 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

より, $\operatorname{rank}[\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3] = 3$ であるから成立.

(ii) $[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_4 \,|\, \boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 & 2 & 9 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & -4 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 & 2 & 9 \\ 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 14 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -14 & -12 & -13 & -12 & -26 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

より, $\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4)$, $\boldsymbol{b}_2 = -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{b}_3 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4$ とそれぞれ表せることからわかる.

(iii) 逆に $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ が $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ の 1 次結合で表せることを示せばよい. これは

$[\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3 \,|\, \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_4] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & -4 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 10 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 14 & -7 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 10 & -5 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & -2 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

より, $\boldsymbol{a}_1 = -2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_3$, $\boldsymbol{a}_2 = 6\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 - 2\boldsymbol{b}_3$, $\boldsymbol{a}_4 = -2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3$ と表せることからわかる.

《注意》 (i) は $U = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3 \rangle$ が 3 次元で $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ がその基底であることを意味する. (ii) は $U \subset W$, (iii) は $U \supset W$ を意味する. (2) で $\dim W = 3$ であることがわかっているので, **教科書 命題 18.6** に注意すれば, (ii), (iii) のどちらか一方が言えれば, (i) と合わせて, $U = W$ であることが言え, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ が W の基底とわかる.

レポート問題の解答例

(1)

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] = \begin{bmatrix} -2 & 5 & a \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & -6 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -6 & 1 \\ 0 & -7 & a+2 \\ 0 & 20 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & a-\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

となることから，$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ が 1 次従属となる条件は，$\mathrm{rank}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] < 3$，すなわち$\boxed{a = \frac{4}{5}}$．このとき，$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ の解は，$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$ となる．従って非自明な 1 次関係式は，例えば $c = 1$ として $\boxed{\frac{7}{5}\boldsymbol{a}_1 + \frac{2}{5}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}}$となる．あるいは，$c = 5$ として $7\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + 5\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ でもよい．

(2)

$$[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & s \\ -2 & 1 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & s-9 \\ 0 & 3 & 15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & s+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる．$s \neq -1$ なら $\mathrm{rank}[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3] = 3$ となって $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ は 1 次独立となるから，$\dim W = 3$ で，$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ が基底．$s = -1$ なら $\mathrm{rank}[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3] = 2$ であり，主成分の存在する 1,2 列に注目すれば，$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ は 1 次独立．さらに非自明な 1 次関係式として，$2\boldsymbol{b}_1 - 5\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0}$ が得られることから，$\boldsymbol{b}_3 = -2\boldsymbol{b}_1 + 5\boldsymbol{b}_2$．従って，$W = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$ となる．よって，$\dim W = 2$ で，$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ が基底．まとめると

$$\boxed{s \neq -1 \text{ なら } \dim W = 3 \text{ で基底 } (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3),\ s = -1 \text{ なら } \dim W = 2 \text{ で基底 } (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)}$$

(3) U を定義する同次連立 1 次方程式の係数行列は，行基本変形により

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる．従って，U の元は，$c_1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ と表せるから，$U = \left\langle \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ となる．$\mathrm{rank}[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] = 2$ は第 2,3 成分に着目すればわかるので，$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ は 1 次独立である．よって，

$$\boxed{\dim U = 2,\ \text{基底は } \left(\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)}$$