数学演習第二 （演習第 6 回）

微積：多変数関数のテーラーの定理，極値　2026 年 11 月 18 日

要点 1：2 変数関数のテーラーの定理 (微積教科書 pp.94–95)

関数 $f(x,y)$ は開領域 D において C^n 級で, $(a,b)\in D$ とする.

(1) **(テーラーの定理)** (a,b) と $(a+h,b+k)$ を結ぶ線分が D に含まれるとき,

$$f(a+h,b+k)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a,b)+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+\theta h,b+\theta k)$$

となる $\theta\in(0,1)$ が存在する.

(2) **(漸近展開)**

$$f(a+h,b+k)=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a,b)+o\left((h^2+k^2)^{n/2}\right)\quad((h,k)\to(0,0)).$$

ここで, f は C^n 級だから n 次までの偏微分は, x,y で偏微分する順番によらず, それぞれで何回偏微分したかだけで決まる. 従って, $\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^j f$ は, 通常の二項展開と同じように, 二項係数 $\binom{j}{l}=\dfrac{j!}{l!(j-l)!}$ を用いて

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f=\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}h^{j-l}k^l\frac{\partial^j f}{\partial x^{j-l}\partial y^l}$$

と表される. また, $f(a+h,b+k)=P_n(h,k)+o((h^2+k^2)^{n/2})$ をみたす n 次以下の 2 変数多項式 $P_n(h,k)$ は上の形 $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}h^{j-l}k^l\frac{\partial^j f}{\partial x^{j-l}\partial y^l}(a,b)$ と一意的に定まる（漸近展開の一意性）.

例 1　$\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(a,b)$ を計算すると,

$$\begin{aligned}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(a,b)&=\left(h^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}+3h^2k\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+3hk^2\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+k^3\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right)f(a,b)\\&=f_{xxx}(a,b)h^3+3f_{xxy}(a,b)h^2k+3f_{xyy}(a,b)hk^2+f_{yyy}(a,b)k^3.\end{aligned}$$

例 2　$f(x,y)=xe^{x-y}$ の 3 次までのマクローリン展開 (原点でのテーラー展開) を漸近展開の形で求める.

$$f(0,0)=0,\ \ f_x(0,0)=1,\ \ f_y(0,0)=0,\ \ f_{xx}(0,0)=2,\ \ f_{xy}(0,0)=-1,\ \ f_{yy}(0,0)=0,$$
$$f_{xxx}(0,0)=3,\ \ f_{xxy}(0,0)=-2,\ \ f_{xyy}(0,0)=1,\ \ f_{yyy}(0,0)=0$$

であるから, 上の (2) を用いれば ($(a,b)=(0,0)$ として計算し, (h,k) を (x,y) で置き換える),

$$xe^{x-y}=x+x^2-xy+\frac{1}{2}x^3-x^2y+\frac{1}{2}xy^2+o((x^2+y^2)^{3/2})\quad((x,y)\to(0,0)).$$

漸近展開の一意性に注意すると，1 変数の漸近展開 $e^t=1+t+\frac{1}{2}t^2+o(t^2)$ $(t\to0)$ を用いて,

$$\begin{aligned}xe^{x-y}&=x\{1+(x-y)+\tfrac{1}{2}(x-y)^2+o(x^2+y^2)\}\\&=x+x^2-xy+\tfrac{1}{2}x^3-x^2y+\tfrac{1}{2}xy^2+o((x^2+y^2)^{3/2})\quad((x,y)\to(0,0))\end{aligned}$$

と求めることもできる.（ここで $|x|\leqq\sqrt{x^2+y^2}$ なので $x\,o(x^2+y^2)=o((x^2+y^2)^{3/2})$ であることに注意する.）

要点 2：2 変数関数の極値問題 (微積教科書 pp.95–96)

点 (a,b) の近傍で定義された実数値関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で**極大値** $f(a,b)$ をとるとは, (a,b) に十分近い (a,b) とは異なる点 (x,y) に対して，$f(a,b)$ が $f(x,y)$ より大きいことをいう．すなわち, ある $\varepsilon > 0$ が存在して，$0 < (x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon^2$ をみたすすべての (x,y) に対して，不等式 $f(a,b) > f(x,y)$ が成り立つときをいう (**極小値**については上の不等号を逆向きにしたもので定義する)．極大値と極小値を総称して**極値**と呼ぶ.

(i) **極値をとるための必要条件** (極値をとる点の候補をしぼる：$f(x,y)$ の停留点)
関数 f が点 (a,b) の近傍で x,y に関して偏微分可能で，点 (a,b) で極値をとるならば,
$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ である.

(ii) **極値の判別**
関数 f は点 (a,b) の近傍で C^2 級で, $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ であるとする．判別式を

$$\boxed{D(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - \{f_{xy}(a,b)\}^2}$$

で定義する.

- $D(a,b) > 0$ かつ $f_{xx}(a,b) > 0$ ならば, f は点 (a,b) で極小値をとる.
- $D(a,b) > 0$ かつ $f_{xx}(a,b) < 0$ ならば, f は点 (a,b) で極大値をとる.
- $D(a,b) < 0$ ならば, f は点 (a,b) で極値をとらない.

《注意》$D(a,b) = 0$ の場合は，極値をとる場合もとらない場合もあり，関数 $f(x,y)$ の概形や高次の偏導関数などを使ってさらに調べることになる.

例 3 $f(x,y) = -2x^2 - xy - y^2 + 2x - 3y$ の極値.

f の 2 次以下の偏導関数は

$$f_x = -4x - y + 2,\ \ f_y = -x - 2y - 3,\ \ f_{xx} = -4,\ \ f_{xy} = -1,\ \ f_{yy} = -2.$$

(i) $f_x = f_y = 0$ の解は，$4x + y = 2, x + 2y = -3$ を解いて，$(x,y) = (1,-2)$.

(ii) 点 $(1,-2)$ において，$D(1,-2) = (-4)(-2) - (-1)^2 = 7 > 0$,　$f_{xx}(1,-2) = -4 < 0$ であるから, f は点 $(1,-2)$ で極大値 $f(1,-2) = 4$ をとる.

例 4 $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2$ の極値.

f の 2 次以下の偏導関数は

$$f_x = 4x^3 - 2(x+y),\quad f_y = 4y^3 - 2(x+y),\quad f_{xx} = 12x^2 - 2,\quad f_{xy} = -2,\quad f_{yy} = 12y^2 - 2.$$

(i) $f_x = f_y = 0$ を解く．$f_x - f_y = 0$ より $4(x^3 - y^3) = 0$, 従って $x = y$ が必要．$f_x = 0$ に代入して, $4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0$ となるから，$(x,y) = (0,0), (1,1), (-1,-1)$.

(ii) これらの各点で f が極値をとるかどうかを調べる.

- 点 $(\pm 1, \pm 1)$ において, $D(\pm 1, \pm 1) = 10 \cdot 10 - (-2)^2 = 96 > 0$, $f_{xx}(\pm 1, \pm 1) = 10 > 0$. よって, f は点 $(\pm 1, \pm 1)$ で極小値 $f(\pm 1, \pm 1) = -2$ をとる (複号同順).
- 点 $(0,0)$ において, $D(0,0) = (-2)(-2) - (-2)^2 = 0$ となり，上の判別法では判定できない．そこで，原点を通る 2 つの直線上での増減に注目する.

  x 軸上で，$f(x,0) = x^2(x^2-1) < 0 = f(0,0)$ $(0 < |x| < 1)$ より，原点の近くに $f(0,0)$ より小さい値をとる点がある.

  $y = -x$ 上で $f(x,-x) = 2x^4 > 0 = f(0,0)$ $(x \neq 0)$ であるから，原点の近くに $f(0,0)$ より大きい値をとる点がある.

  従って，$f(x,y)$ は，$(0,0)$ では極値をとらない.

【演習中に扱う予定の問題】： 1(1)(5)(6),2(1)(3)(5),3(3)

1 次の関数 $f(x,y)$ について, 3 次の項までのマクローリン展開 (原点におけるテーラー展開) を

$$f(x,y) = c_{00} + (c_{10}x + c_{01}y) + (c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2) + (c_{30}x^3 + c_{21}x^2y + c_{12}xy^2 + c_{03}y^3) + o((x^2+y^2)^{3/2}) \quad ((x,y) \to (0,0))$$

の形で求めよ.

(1) $f(x,y) = \sin(xy)$

(2) $f(x,y) = \sqrt{1+2x^2}\,\log(1-y)$

(3) $f(x,y) = (1+y)^x \ \left(= e^{x\log(1+y)}\right)$

(4) $f(x,y) = a^{x+2y} \qquad (0 < a \neq 1)$

(5) $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{Tan}^{-1}\, y}{\cos x}$

(6) $f(x,y) = \sqrt{1+e^{2xy}}$

2 次の関数 $f(x,y)$ に対して $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ となる点 (a,b) をすべて求めよ. さらに, $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(1) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - x - 4y$

(2) $f(x,y) = x^2y - xy^2 + x^2 - xy + y^2 + 1$

(3) $f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y) \qquad (0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi)$

(4) $f(x,y) = (\sin x)(\sin y) \qquad (0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi)$

(5) $f(x,y) = (x+y)e^{-\frac{xy}{2}}$

(6) $f(x,y) = x^5 - x^2y + y^2$

3 次の関数 $f(x,y)$ が $(0,0)$ において極値をとるかどうかを判別せよ.

(1) $f(x,y) = \cos x + \cos y + 2xy$

(2) $f(x,y) = x^2 + y^4$

(3) $f(x,y) = x^4 - x^2 + 2xy - y^2$

(4) $f(x,y) = x^4 + y^4 + x^2 - 2xy + y^2$

演習第 6 回　レポート問題

I 次の関数 $f(x,y)$ について, 3 次の項までのマクローリン展開 (原点におけるテーラー展開) を 1 と同じ形式で求めよ.

(1) $\cosh(x-y)\mathrm{Sin}^{-1}(x-2y)$

(2) $f(x,y) = \log(x + \sqrt{1+2y})$

II 次の関数の極値を求めよ.

(3) $f(x,y) = xy + \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{y}$

(4) $f(x,y) = xy(x^2+y^2-4)$