数学演習第二（演習第 6 回）　【解答例】

微積：多変数関数のテーラーの定理，極値　2026 年 11 月 18 日

1　$f(x,y)$ の 3 次までの偏導関数を計算して，マクローリン展開の公式

$$f(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}\Big(f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\Big)$$
$$+ \frac{1}{6}\Big(f_{xxx}(0,0)x^3 + 3f_{xxy}(0,0)x^2y + 3f_{xyy}(0,0)xy^2 + f_{yyy}(0,0)y^3\Big) + o((x^2+y^2)^{3/2})$$

に代入すれば問題の各関数の 3 次までの展開式は必ず求まるが，漸近展開の一意性のおかげで， 0 の近傍で C^3 級の 1 変数関数 $\varphi(t)$ に対するマクローリン展開の公式

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2}\varphi''(0)t^2 + \frac{1}{6}\varphi'''(0)t^3 + o(t^3) \quad (t \to 0)$$

を利用して， より単純な計算で展開式が得られることがある．与えられた関数はそのような場合に該当する．以下では偏微分の計算練習のために《補足》に偏導関数を記載するが直接計算するのは大変である．

(1) $\sin t = t + o(t^2)$ に $t = xy$ を代入し, $\sin(xy) = xy + o((x^2+y^2)^2) = \boxed{xy} + o((x^2+y^2)^{3/2})$

《補足》f の 3 次までの偏導関数は以下の通り．

$$f_x = y\cos(xy),\ \ f_y = x\cos(xy),\ \ f_{xx} = -y^2\sin(xy),\ \ f_{xy} = \cos(xy) - xy\sin(xy),\ \ f_{yy} = -x^2\sin(xy),$$
$$f_{xxx} = -y^3\cos(xy),\ \ f_{xxy} = -2y\sin(xy) - xy^2\cos(xy),\ \ f_{xyy} = -2x\sin(xy) - x^2y\cos(xy),\ \ f_{yyy} = -x^3\cos(xy).$$

(2) $\sqrt{1+s}$ のマクローリン展開式 $\sqrt{1+s} = 1 + (1/2)s - (1/8)s^2 + o(s^2)$ $(s \to 0)$, および $\log(1+t)$ のマクローリン展開式 $\log(1+t) = t - (1/2)t^2 + (1/3)t^3 + o(t^3)$ $(t \to 0)$ にそれぞれ $s = 2x^2$, $t = -y$ を代入して,

$$\sqrt{1+2x^2} = 1 + x^2 + o(x^3) \quad (x \to 0), \qquad \log(1-y) = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + o(y^3) \quad (y \to 0).$$

これらを掛け合わせて

$$\sqrt{1+2x^2}\,\log(1-y) = (1 + x^2 + o(x^3))\Big(-y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + o(y^3)\Big)$$
$$= \boxed{-y - \frac{1}{2}y^2 - x^2y - \frac{1}{3}y^3} + o((x^2+y^2)^{3/2}) \quad ((x,y) \to (0,0)).$$

《補足》f の 3 次までの偏導関数は $g(x) = \sqrt{1+2x^2}$, $h(y) = \log(1-y)$ とおいて,

$$f_x = g'h,\ f_y = gh',\ f_{xx} = g''h,\ f_{xy} = g'h',\ f_{yy} = gh'',\ f_{xxx} = g'''h,\ f_{xxy} = g''h',\ f_{xyy} = g'h'',\ f_{yyy} = gh'''$$

であり, ここで現れる導関数は次の通り:

$$g'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}},\ \ g''(x) = \frac{2}{(1+2x^2)^{3/2}},\ \ g'''(x) = -\frac{12x}{(1+2x^2)^{5/2}},$$
$$h'(y) = -\frac{1}{1-y},\ \ h''(y) = -\frac{1}{(1-y)^2},\ \ h'''(y) = -\frac{2}{(1-y)^3}.$$

(3) $(1+y)^x = \{e^{\log(1+y)}\}^x = e^{x\log(1+y)}$ において,

$$x\log(1+y) = x\Big(y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)\Big) = xy - \frac{1}{2}xy^2 + o((x^2+y^2)^{3/2}).$$

よって, $t = x\log(1+y)$ を $e^t = 1 + t + \dfrac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ $(t \to 0)$ に代入して,

$$(1+y)^x = e^{x\log(1+y)} = 1 + \Big(xy - \frac{1}{2}xy^2 + o((x^2+y^2)^{3/2})\Big) + o((x^2+y^2)^{3/2})$$
$$= \boxed{1 + xy - \tfrac{1}{2}xy^2} + o((x^2+y^2)^{3/2}) \quad ((x,y) \to (0,0)).$$

《補足》f の 3 次までの偏導関数は以下の通り．

$$f_x = (1+y)^x\log(1+y),\ \ f_y = x(1+y)^{x-1},$$
$$f_{xx} = (1+y)^x\big(\log(1+y)\big)^2,\ \ f_{xy} = (1+y)^{x-1}\big(1 + x\log(1+y)\big),\ \ f_{yy} = x(x-1)(1+y)^{x-2},$$
$$f_{xxx} = (1+y)^x\big(\log(1+y)\big)^3,\ \ f_{xxy} = (1+y)^{x-1}\log(1+y)\big(2 + x\log(1+y)\big),$$
$$f_{xyy} = (1+y)^{x-2}\big(2x - 1 + x(x-1)\log(1+y)\big),\ \ f_{yyy} = x(x-1)(x-2)(1+y)^{x-3}.$$

(4) $a^{x+2y} = (e^{\log a})^{x+2y} = e^{(x+2y)\log a}$ であるから, $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)$ $(t \to 0)$ に $t = (\log a)(x+2y)$ を代

入し, $|(x+2y)^3| \leqslant 5^{3/2}(x^2+y^2)^{3/2}$ に注意して,

$$a^{x+2y} = 1 + (\log a)(x+2y) + \frac{1}{2}(\log a)^2(x+2y)^2 + \frac{1}{6}(\log a)^3(x+2y)^3 + o((x^2+y^2)^{3/2})$$
$$= \boxed{1 + (\log a)(x+2y) + (\log a)^2\left(\tfrac{1}{2}x^2 + 2xy + 2y^2\right) + (\log a)^3\left(\tfrac{1}{6}x^3 + x^2y + 2xy^2 + \tfrac{4}{3}y^3\right)}$$
$$+ o((x^2+y^2)^{3/2}) \quad ((x,y) \to (0,0)).$$

《補足》f の 3 次までの偏導関数は以下の通り.

$$f_x = (\log a)a^{x+2y},\ f_y = 2(\log a)a^{x+2y},\ f_{xx} = (\log a)^2a^{x+2y},\ f_{xy} = 2(\log a)^2a^{x+2y},\ f_{yy} = 4(\log a)^2a^{x+2y},$$
$$f_{xxx} = (\log a)^3a^{x+2y},\ \ f_{xxy} = 2(\log a)^3a^{x+2y},\ \ f_{xyy} = 4(\log a)^3a^{x+2y},\ \ f_{yyy} = 8(\log a)^3a^{x+2y}.$$

(5) $g(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, $h(y) = \mathrm{Tan}^{-1}\, y$ とおいて $f(x,y) = g(x)h(y)$ と書く. ここで, $\cos x = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ であるから, $\dfrac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + o(t^2)$ を用いて,

$$g(x) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - (\frac{1}{2}x^2 + o(x^3))} = 1 + \left(\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) + o(x^3) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

また, $h(y)$ については, $h'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + o(t^2)$ を $[0,\, y]$ 上で積分して,

$$h(y) = \mathrm{Tan}^{-1}\, y = \int_0^y h'(t)\,dt = y - \frac{1}{3}y^3 + o(y^3).$$

よって,

$$\frac{\mathrm{Tan}^{-1}\, y}{\cos x} = \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)\left(y - \frac{1}{3}y^3 + o(y^3)\right) = \boxed{y + \tfrac{1}{2}x^2y - \tfrac{1}{3}y^3} + o((x^2+y^2)^{3/2}) \ \ ((x,y) \to (0,0)).$$

《補足》f の 3 次までの偏導関数は

$f_x = g'h,\ \ f_y = gh',\ \ f_{xx} = g''h,\ \ f_{xy} = g'h',\ \ f_{yy} = gh'',\ \ f_{xxx} = g'''h,\ \ f_{xxy} = g''h',\ \ f_{xyy} = g'h'',\ \ f_{yyy} = gh'''$

であり, ここに現れる導関数は次の通り:

$$g'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x},\ \ g''(x) = \frac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x},\ \ g'''(x) = \frac{(5+\sin^2 x)\sin x}{\cos^4 x},$$
$$h'(y) = \frac{1}{1+y^2},\ \ h''(y) = -\frac{2y}{(1+y^2)^2},\ \ h'''(y) = -\frac{2(1-3y^2)}{(1+y^2)^3}.$$

(6) $g(t) = \sqrt{1+e^{2t}}$ とおけば, $f(x,y) = g(xy)$ と書ける. ここで,

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) \ \ (t \to 0), \quad \sqrt{1+s} = 1 + \frac{1}{2}s - \frac{1}{8}s^2 + o(s^2) \ \ (s \to 0)$$

であるから,

$$1 + e^{2t} = 1 + (1 + 2t + 2t^2 + o(t^2)) = 2(1 + t + t^2 + o(t^2)),$$
$$\sqrt{1+e^{2t}} = \sqrt{2}\sqrt{1 + (t + t^2 + o(t^2))} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}(t+t^2) - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2)\right) = \sqrt{2} + \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{3t^2}{4\sqrt{2}} + o(t^2).$$

これに $t = xy$ を代入して, $\sqrt{1+e^{2xy}} = \boxed{\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,xy} + o((x^2+y^2)^{3/2}) \ \ ((x,y) \to (0,0))$.

《補足》f の 3 次までの偏導関数は

$$f_x = g'(xy)y,\ \ f_y = g'(xy)x,\ \ f_{xx} = g''(xy)y^2,\ \ f_{xy} = h(xy),\ \ f_{yy} = g''(xy)x^2,$$
$$f_{xxx} = g'''(xy)y^3,\ \ f_{xxy} = h'(xy)y,\ \ f_{xyy} = h'(xy)x,\ \ f_{yyy} = g'''(xy)x^3$$

と表される. ここで, $h(t) = tg''(t) + g'(t)$, $h'(t) = tg'''(t) + 2g''(t)$. 更に,

$$g'(t) = e^{2t}(1+e^{2t})^{-1/2},\ \ g''(t) = (2+e^{2t})e^{2t}(1+e^{2t})^{-3/2},\ \ g'''(t) = (4+2e^{2t}+e^{4t})e^{2t}(1+e^{2t})^{-5/2}.$$

2 **要点 2** の判別法 (i),(ii) に従って考える.

(1) (i) 連立 1 次方程式 $\begin{cases} f_x = 2x - y - 1 = 0 \\ f_y = -x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y) = \boxed{(2,3)}$

(ii) $f_{xx} = 2, f_{xy} = -1, f_{yy} = 2$ より $D(2,3) = 3 > 0$ かつ $f_{xx}(2,3) > 0$. よって, $\boxed{(2,3) \text{ で極小値 } f(2,3) = -7}$

(2) (i) $\begin{cases} f_x = 2xy - y^2 + 2x - y = (y+1)(2x-y) = 0 \\ f_y = x^2 - 2xy - x + 2y = 0 \end{cases}$ より, 第一式から $y = -1, 2x$. 第二式から (a) $y = -1$ のとき, $x^2 + x - 2 = 0$ より, $\boxed{(x,y) = (-2,-1), (1,-1)}$, (b) $y = 2x$ のとき, $-3x^2 + 3x = 0$ より, $\boxed{(x,y) = (0,0), (1,2)}$

(ii) $f_{xx} = 2y + 2$, $f_{xy} = 2x - 2y - 1$, $f_{yy} = -2x + 2$ より, $D(1,2) = 6 \cdot 0 - (-3)^2 < 0$, $D(1,-1) = 0 \cdot 0 - 3^2$, $D(-2,-1) = 0 \cdot 6 - (-3)^2 < 0$ なので, $(1,2), (1,-1), (-2,-1)$ では極値をとらない. $D(0,0) = 2 \cdot 2 - (-1)^2 > 0$, $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$ より極小. まとめると, $\boxed{(0,0) \text{ で極小値 } f(0,0) = 1}$

(3) (i) $\begin{cases} f_x = \cos x - \cos(x+y) = 0 \\ f_y = \cos y - \cos(x+y) = 0 \end{cases}$ において 2 式の差をとり, $\cos x = \cos y$, $x, y \in (0, \pi)$ から $x = y$, よって $(x,y) = \boxed{\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right)}$

(ii) $f_{xx} = -\sin x + \sin(x+y)$, $f_{xy} = \sin(x+y)$, $f_{yy} = -\sin y + \sin(x+y)$ なので, $D\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{9}{4} > 0$, $f_{xx}\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} < 0$ より極大. $\boxed{\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right) \text{ で極大値 } f\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$

(4) (i) $\begin{cases} f_x = \cos x \sin y = 0 \\ f_y = \sin x \cos y = 0 \end{cases}$ を解く. $x, y \in (0, \pi)$ より $\sin x, \sin y \neq 0$ だから, $\cos x = 0$ かつ $\cos y = 0$. よって, $(x,y) = \boxed{\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)}$

(ii) $f_{xx} = -\sin x \sin y$, $f_{xy} = \cos x \cos y$, $f_{yy} = -\sin x \sin y$ より, $D(x,y) = \sin^2 x \sin^2 y - \cos^2 x \cos^2 y$. $D\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) = 1 > 0$, $f_{xx}\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$ より, 極大. $\boxed{\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \text{ で極大値 } f\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) = 1}$

(5) (i) $\begin{cases} f_x = \{1 - (1/2)y(x+y)\} e^{-\frac{xy}{2}} = 0 \\ f_y = \{1 - (1/2)x(x+y)\} e^{-\frac{xy}{2}} = 0 \end{cases}$ を解く. $e^{-xy/2} > 0$ に注意すると, $y(x+y) = 2, x(x+y) = 2$ である. $x = 0$ または $y = 0$ はこれをみたさないから, $\dfrac{2}{y} = \dfrac{2}{x}$ より $x = y$ が必要. これを $y(x+y) = 2$ に代入すれば, $x^2 = 1$. よって停留点は, $\boxed{(x,y) = (1,1), (-1,-1)}$

(ii)

$$f_{xx} = -\frac{1}{4} y\{4 - (x+y)y\} e^{-\frac{xy}{2}}, \quad f_{xy} = -\frac{1}{4}(x+y)(4 - xy) e^{-\frac{xy}{2}}, \quad f_{yy} = -\frac{1}{4} x\{4 - (x+y)x\} e^{-\frac{xy}{2}}$$

より, $D(\pm 1, \pm 1) = \left(\mp\dfrac{1}{2\sqrt{e}}\right)\left(\mp\dfrac{1}{2\sqrt{e}}\right) - \left(\mp\dfrac{3}{2\sqrt{e}}\right)^2 = -\dfrac{2}{e} < 0$. よって, $\boxed{f \text{ は極値をとらない}}$.

(6) (i) $\begin{cases} f_x = x(5x^3 - 2y) = 0 \\ f_y = -x^2 + 2y = 0 \end{cases}$ を解く. $x = 0$ なら $y = 0$. $x \neq 0$ なら, $5x^3 = 2y = x^2$ より $x = \dfrac{1}{5}$. よって, $(x,y) = \boxed{(0,0),\ \left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{50}\right)}$

(ii) $f_{xx} = 20x^3 - 2y$, $f_{xy} = -2x$, $f_{yy} = 2$.

$D(0,0) = 0$ より, $D(0,0)$ からは極値判定できない. $f(x,y) = \left(y - \dfrac{x^2}{2}\right)^2 - x^4\left(\dfrac{1}{4} - x\right)$ と変形すれば $y = \dfrac{x^2}{2}$ 上で第 1 項が消えるので $f\left(t, \dfrac{t^2}{2}\right) = -t^4\left(\dfrac{1}{4} - t\right) < 0 \left(0 < |t| < \dfrac{1}{4}\right)$ であり, y 軸上で $f(0,y) = y^2 > 0$ $(y \neq 0)$ である. よって, f は $(0,0)$ で極値をとらない.

$D\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{50}\right) = \dfrac{2}{25} > 0$, $f_{xx}\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{50}\right) = \dfrac{3}{25} > 0$ より, 極小.

まとめると, $\boxed{\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{50}\right) \text{ で極小値 } f\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{50}\right) = -\dfrac{1}{12500}}$

3

(1) $f(x,y) = \cos x + \cos y + 2xy$. $f_x = 2y - \sin x$, $f_y = 2x - \sin y$ より, $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. $f_{xx} = -\cos x$, $f_{xy} = 2$, $f_{yy} = -\cos y$ より, $D(0,0) = -3 < 0$. よって, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で $\boxed{\text{極値をとらない}}$.

(2) $f(x,y) = x^2 + y^4$. $(x,y) \neq (0,0)$ で $f(x,y) > 0 = f(0,0)$ となるので, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で $\boxed{\text{極小値をとる}}$.

(3) $f(x,y) = (x^2)^2 - (x-y)^2 = (x^2 + x - y)(x^2 - x + y)$ と表すと, $x \neq 0$ のとき, $-x^2 + x < x^2 + x$ で, $-x^2 + x < y < x^2 + x$ ならば, $f(x,y) > 0 = f(0,0)$ をみたし, $y < -x^2 + x$ または $y > x^2 + x$ ならば, $f(x,y) < 0 = f(0,0)$ をみたす. よって, $(0,0)$ で $\boxed{\text{極値をとらない}}$.

(4) 2 次以下の項を (2) と同様に変形して, $f(x,y)=x^4+y^4+(x-y)^2$ と表される. $(x,y)\neq(0,0)$ で $f(x,y)>0=f(0,0)$ となるので, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で $\boxed{\text{極小値をとる}}$.

レポート問題の解答例

Ⅰ $r=\sqrt{x^2+y^2}$ とかく.

(1) 1 変数のマクローリン展開として, $t\to 0$ のとき,

$$\cosh t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}=1+\frac{t^2}{2}+o(t^3),\quad \mathrm{Sin}^{-1}t=\int_0^t\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\int_0^t\left(1+\frac{u^2}{2}+o(u^2)\right)du=t+\frac{t^3}{6}+o(t^3)$$

であることを用いると, $(x,y)\to(0,0)$ のとき

$$\cosh(x-y)\mathrm{Sin}^{-1}(x-2y)=\left\{1+\frac{(x-y)^2}{2}\right\}\cdot\left\{(x-2y)+\frac{(x-2y)^3}{6}\right\}+o(r^3)$$

$$=x-2y+\frac{3(x-2y)(x-y)^2+(x-2y)^3}{6}+o(r^3)=\boxed{x-2y+\frac{2}{3}x^3-3x^2y+\frac{9}{2}xy^2-\frac{7}{3}y^3}+o(r^3)$$

(2) 1 変数のマクローリン展開として, $t\to 0$ のとき,

$$\sqrt{1+t}=1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+\frac{t^3}{16}+o(t^3),\quad \log(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+o(t^3)$$

であることを用いると, まず, $(x,y)\to(0,0)$ で $x+\sqrt{1+2y}=1+x+y-\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{y^3}{2}+o(r^3)$ となり,

$$\log(x+\sqrt{1+2y})=\left(x+y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(x+y-\frac{y^2}{2}\right)^2+\frac{1}{3}(x+y)^3+o(r^3)$$

$$=\boxed{x+y-\frac{x^2}{2}-xy-y^2+\frac{x^3}{3}+x^2y+\frac{3}{2}xy^2+\frac{4}{3}y^3}+o(r^3)$$

Ⅱ **要点 2** の判別法 (i),(ii) に従って考える.

(3)

(i) $f_x=y-\dfrac{2}{x^2}$, $f_y=x-\dfrac{4}{y^2}$ だから, $f_x=f_y=0$ のとき, $y=\dfrac{2}{x^2}$ を $x=\dfrac{4}{y^2}$ に代入すると $x=x^4$ が必要であり, $f(x,y)$ の定義域は $x,y\neq 0$ であることに注意すれば, $x=1$. このとき, $y=2$ が $f_x=f_y=0$ をみたす唯一の解だから, $(x,y)=(1,2)$ が極値の候補となる. (なお, x を消去して $y=\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{y^4}{8}$ とすると $y=2$ が必要であり, それを $f_x=0$ にだけ代入して $x=\pm1$ としまうと, $(-1,2)$ も候補に残ってしまうが, $(-1,2)$ は $f_y=0$ を満たさず停留点ではないことに注意.)

(ii) $f_{xx}=\dfrac{4}{x^3}$, $f_{xy}=1$, $f_{yy}=\dfrac{8}{y^3}$ だから, $D(1,2)=4\cdot1-1^2=3>0$ かつ $f_{xx}(1,2)=4>0$ より極小.

よって, $\boxed{(x,y)=(1,2)\text{ で極小値 }f(1,2)=6\text{ をとる.}}$

(4)

(i) $f_x=y(x^2+y^2-4)+2x^2y=y(3x^2+y^2-4)$, $f_y=x(x^2+y^2-4)+2xy^2=x(x^2+3y^2-4)$. $x=0$ なら $f_x=y(y^2-4)=0$ となる $y=0,\pm2$. $y=0$ なら $f_y=x(x^2-4)=0$ となる $x=0,\pm2$. $x,y\neq0$ なら $f_x=f_y=0$ となるには $3x^2+y^2=4, x^2+3y^2=4$ が必要だから, x^2,y^2 について解くと $x^2=1,y^2=1$ となる. 従って, $(x,y)=(0,0),(0,\pm2),(\pm2,0),(\pm1,\pm1)$ が極値の候補となる.

(ii) $f(x,y)$ は $(x,y)\to(y,x)$, $(x,y)\to(-x,-y)$ に関して対称だから, $(x,y)=(0,0),(2,0),(1,1),(1,-1)$ について調べればよい. $f_{xx}=6xy, f_{xy}=3x^2+3y^2-4, f_{yy}=6xy$ である. $D(0,0)=-(-4)^2<0$ より極値でない. $D(2,0)=-8^2<0$ より極値でない. $D(1,1)=6^2-2^2=32>0$ かつ $f_{xx}(1,1)=6>0$ より極小. $D(1,-1)=(-6)^2-2^2=32>0$ かつ $f_{xx}(1,-1)=-6<0$ より極大.

まとめると, $\boxed{(x,y)=(1,1),(-1,-1)\text{ で極小値 }-2,\ (x,y)=(1,-1),(-1,1)\text{ で極大値 }2}$