数学演習第二 （演習第７回）

線形：座標，行列の零空間・行空間・列空間　2026 年 11 月 25 日

要点 1：基底によるベクトルの座標 (線形教科書 pp. 119–120)

r 次元ベクトル空間 V の基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r)$ に対して, 各 $\boldsymbol{v} \in V$ は $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r$ の 1 次結合として $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{b}_r$ と 1 通りに表される．このとき，一意に定まる列ベクトル $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^r$ を $\boldsymbol{v}$ の基底 $\mathcal{B}$ に関する**座標**といい，$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ で表す．$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r$ が列ベクトルでなくても，ベクトルと行列の積の記法を流用して次のように書くのが便利である：

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{b}_r \quad \longleftrightarrow \quad \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{b}_1,\, \boldsymbol{b}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{b}_r)[\boldsymbol{v}]_{\mathscr{B}}$$

V が列ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ (の部分空間) であれば，座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ を求めるには連立 1 次方程式

$$\underbrace{[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r]}_{n \times r \text{ 行列}} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} = \boldsymbol{v}$$

を解けばよい.

例 1　$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする．$\mathbb{R}^2$ の標準基底 $\mathcal{E} = \left(\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\mathbb{R}^2$ の基底 $\mathcal{B} = \left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right)$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ は

$$[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 | \boldsymbol{v}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

により, 非同次連立 1 次方程式 $[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{v}$ の解 $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ が得られることから, $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2$,

すなわち，$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

例 2　$W = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$ において $\mathscr{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ は W の基底である．$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \in W$ であることを確かめ，$\mathcal{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}}$ を求める.

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 | \boldsymbol{v}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -7 & -7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

から，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{v}$ の解は $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ である．$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ である.

要点 2：共通部分と和空間に関する次元公式 (線形教科書 p. 134)

ベクトル空間 V の有限次元部分空間 W_1, W_2 に対して, 次の等式が成り立つ:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

例 3　$\mathbb{R}^3$ における次の 2 つの部分空間 W_1, W_2 に対する和空間 W_1+W_2 と共通部分 $W_1 \cap W_2$ を考える.

$$W_1 = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$\operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = 2, \operatorname{rank}[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = 2$ はいずれもほぼ計算せずに見てとれるので, $\dim W_1 = 2, \dim W_2 = 2$ となる. 次に, 行基本変形により,

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

となる. ここから 2 つのことを読み取ることができる.

- $W_1 + W_2 = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$ だから, 上の簡約行列の階数 3 であり, 主成分が第 $1, 2, 3$ 列に存在することにより, $\dim(W_1 + W_2) = 3$, 基底の一例として $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)$ がとれる. **要点 2** の次元公式から, $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) = 2 + 2 - 3 = 1$.
- $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ の解が, $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$. $k = 2$ ととって, 非自明な 1 次関係式 $2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$, すなわち, $2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2$ が成り立つ. 左辺は W_1 に, 右辺は W_2 に属すから, $2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \in W_1 \cap W_2$. $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ だったから, その基底として $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$ がとれる.

要点 3：行列の零空間・行空間・列空間 (線形教科書 pp.107,130,132)

$m \times n$ 行列 A の行ベクトル分割 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m \end{bmatrix}$ と列ベクトル分割 $A = [\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n]$ に対し,

A の**零空間** $N(A) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ (同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解全体が作る $\mathbb{R}^n$ の部分空間)

A の**行空間** $R(A) := \langle \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_m \rangle$ (n 次行ベクトル $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_m$ で生成される $\mathbb{R}_n$ の部分空間)

A の**列空間** $C(A) := \langle \boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n \rangle$ (m 次列ベクトル $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ で生成される $\mathbb{R}^m$ の部分空間)

ただし, $\mathbb{R}_n$ は n 次行ベクトル全体が作るベクトル空間を表す. このとき, 次が成り立つ. (線形教科書 命題 19.2, 19.9)

- $\boxed{\dim N(A) = n - \operatorname{rank} A}$, $N(A)$ の基底の一例は, A の簡約行列から読みとった $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解の組.
- $\boxed{\dim R(A) = \dim C(A) = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} {}^{\mathrm{t}}A}$

  $R(A)$ は A を行基本変形しても変わらない (教科書 補題 19.4) ので, 行基本変形で得られる簡約行列の 1 行から $\operatorname{rank} A$ 行 (つまり簡約行列の非零な行全体) を取れば $R(A)$ の基底になる.

  A に行基本変形を行うと $C(A)$ は変わるが, 列ベクトルの間に成り立つ 1 次関係式は保たれる. 従って, A の簡約行列の主成分の存在する列が $j_1, \ldots, j_{\operatorname{rank} A}$ 列なら, 元の A の列ベクトル $\boldsymbol{c}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{c}_{j_{\operatorname{rank} A}}$ を取れば $C(A)$ の基底になる.

【演習中に扱う予定の問題】： 1,2,4(1)(2),5(1)

1 $\mathbb{R}^3$ の標準基底 $\mathcal{E} = \left(\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ および次の 2 つの基底を考える:

$$\mathcal{A} = \left(\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \quad \mathcal{B} = \left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right).$$

(1) $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{E}}, [\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}}, [\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{B}}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{A}}$ が $\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$ のとき, $\boldsymbol{u}$ の基底 $\mathcal{E}$ に関する座標 $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{E}}$ および基底 $\mathcal{B}$ に関する座標 $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}}$ を求めよ.

2 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $V = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ と V の基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ を考える. このとき, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 13 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ k \end{bmatrix}$ (k は定数) が V に属するかどうかを調べ, V に属するならば基底 $\mathcal{A}$ に関する座標を求めよ.

3 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 W_1, W_2 を次のように定める:

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x + 3y + z = 0 \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \text{連立 1 次方程式} \begin{cases} x + 4y + 3z = a \\ 2x + 3y + z = b \\ 3x + 5y + 2z = c \end{cases} \text{が解をもつ} \right\}$$

(1) W_1 の基底と次元を求めよ.

(2) W_2 は行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ の列空間となる. この事実に注目して, W_2 の基底と次元を求めよ.

(3) 上で求めた W_1, W_2 の基底に含まれるベクトルから $W_1 + W_2$ の基底を選び, その次元を求めよ.

(4) $W_1 \cap W_2$ の基底と次元を求めよ.

4 $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2, W_3 を次のように定める.

$$W_1 = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} 2x + 3y + z - w = 0 \\ x + 2y - z + 2w = 0 \end{matrix} \right\},$$

$$W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; 2x + y - 3z + w = 0 \right\}$$

(1) W_2 の基底と次元を求めよ.

(2) $W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$ について, 基底と次元を求めよ.

(3) $W_2 + W_3, W_2 \cap W_3$ について, 基底と次元を求めよ.

5 次の 2 つの行列 A に対し，零空間 $N(A)$, 行空間 $R(A)$, 列空間 $C(A)$ の 基底と次元を求めよ.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ (2) $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

演習第 7 回　レポート問題

4 次行列 A と $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W を

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & -5 & -7 \end{bmatrix}, \qquad W = \left\langle \boldsymbol{w}_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{w}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

とする.

(1) A の零空間 $N(A)$ の基底と次元を求めよ.

(2) A の列空間 $C(A)$ の基底と次元を求めよ.

(3) $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -12 \\ 9 \end{bmatrix} \in W$ となることを示し，W の基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2)$ に関する $\boldsymbol{w}$ の座標 $[\boldsymbol{w}]_{\mathscr{B}}$ を求めよ.

(4) $N(A)$ と W の和空間 $N(A) + W$ の基底と次元を求めよ.

(5) $N(A)$ と W の共通部分 $N(A) \cap W$ の基底と次元を求めよ.