

2026 年度 数学演習第一・期末統一試験【解説】

2026 年 7 月 29 日実施 ・ 試験時間 90 分

1 n を 1 以上の整数とすると、次の問いに答えよ。ただし、十分整理した形で答えること。

(1) $f(x) = \frac{x}{1+x}$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ。

【答】 $f(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$ より、 $f^{(n)}(x) = -\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = \boxed{\frac{(-1)^{n+1}n!}{(1+x)^{n+1}}}$ 。

(2) $f(x) = x \sin^2 x$ の n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ とするとき、 $f^{(6)}\left(\frac{\pi}{8}\right)$ の値を求めよ。

【答】 $f(x) = x \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2}$ より、Leibniz 則と $(\cos 2x)^{(k)} = 2^k \cos\left(2x + \frac{k\pi}{2}\right)$ を用いて、

$$\begin{aligned} f^{(6)}(x) &= -\frac{1}{2}(x \cos 2x)^{(6)} \\ &= -\frac{1}{2}x(\cos 2x)^{(6)} - \frac{1}{2}\binom{6}{1}(\cos 2x)^{(5)} \\ &= -32x \cos(2x + 3\pi) - 96 \cos\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) \\ &= 32x \cos 2x + 96 \sin 2x. \end{aligned}$$

よって、 $f^{(6)}\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\sqrt{2}\pi + 48\sqrt{2} = \boxed{2\sqrt{2}(\pi + 24)}$ 。

2 次の関数 $f(x)$ について、 $x = 0$ における 3 次の漸近展開 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$ ($x \rightarrow 0$) の各次の係数を (a_0, a_1, a_2, a_3) の形で記せ。例えば、 $f(x) = 1 - 2x^2 + x^3 + o(x^3)$ ($x \rightarrow 0$) なら、 $(1, 0, -2, 1)$ となる。

(3) $f(x) = \log(1 + x + x^2)$

【答】 $\log(1 + x + x^2) = (x + x^2) - \frac{1}{2}(x + x^2)^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$ 。

よって、 $(a_0, a_1, a_2, a_3) = \boxed{\left(0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)}$ 。

(4) $f(x) = e^{\sin x} \cos x$

【答】 $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ より、 $e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ 。

よって、 $f(x) = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) = 1 + x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$ より、

$(a_0, a_1, a_2, a_3) = \boxed{\left(1, 1, 0, -\frac{1}{2}\right)}$ 。

(5) $f(x) = \sqrt{1 + \sin^{-1} x}$

【答】 $(\sin^{-1} t)' = (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ より、 $\sin^{-1} x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ 。よって

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{6}x^3\right) - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{48}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

より、 $(a_0, a_1, a_2, a_3) = \boxed{\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \frac{7}{48}\right)}$ 。

3 (6) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan^{-1} x)^2 - 2 \cosh x + 2}{x \sinh x - x^2}$ を求めよ.

【答】 分母は $x \sinh x - x^2 = x \left(x + \frac{1}{6} x^3 + o(x^3) \right) - x^2 = \frac{1}{6} x^4 + o(x^4)$ だから、分子の 4 次漸近展開を考えよ. $(\tan^{-1} t)' = \frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + o(t^2)$ より, $\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3} x^3 + o(x^3)$ である.

ここで, $\tan^{-1} x = O(x)$ だから, $(\tan^{-1} x)^2$ を 4 次まで展開するためには $\tan^{-1} x$ を 3 次まで展開しておけば十分であることに注意する. (実際には, $\tan^{-1} x$ は奇関数だから x^4 の係数は 0 となり, 上式右辺の $o(x^3)$ は $o(x^4)$ としてもよい.) これにより, 分子の展開は

$$(\tan^{-1} x)^2 - 2 \cosh x + 2 = \left(x - \frac{1}{3} x^3 + o(x^3) \right)^2 - 2 \left(1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4) \right) + 2 = -\frac{3}{4} x^4 + o(x^4).$$

$$\text{となる. よって, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan^{-1} x)^2 - 2 \cosh x + 2}{x \sinh x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{3}{4} x^4 + o(x^4)}{\frac{1}{6} x^4 + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{3}{4} + o(1)}{\frac{1}{6} + o(1)} = \boxed{-\frac{9}{2}}.$$

4 次の定積分の値を求めよ.

$$(7) \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\text{【答】 } \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\sin^{-1} x - \sqrt{1-x^2}]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boxed{\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}}.$$

$$(8) \int_3^4 \frac{\sqrt{4-x}}{2x} dx$$

【答】 $t = \sqrt{4-x}$ とおくと, $x = 4 - t^2$, $dx = -2t dt$ だから,

$$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{\sqrt{4-x}}{2x} dx &= \int_1^0 \frac{t}{2(4-t^2)} \cdot (-2t) dt = \int_0^1 \frac{t^2}{4-t^2} dt = \int_0^1 \left(-1 + \frac{4}{4-t^2} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(-1 + \frac{1}{2-t} + \frac{1}{2+t} \right) dt = \left[-t + \log \frac{2+t}{2-t} \right]_0^1 = \boxed{-1 + \log 3}. \end{aligned}$$

$$(9) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{2 - \cos x}$$

【答】 $t = \tan \frac{x}{2}$ とおくと, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ より,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{2 - \cos x} &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{2 - \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2}{1+3t^2} dt \\ &= \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}(\sqrt{3}t) \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \boxed{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}. \end{aligned}$$

$$(10) \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sin^{-1} x}{\sin(\cos^{-1} x)} dx$$

【答】 $0 \leq \cos^{-1} x \leq \pi$ より, $\sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1 - \cos^2(\cos^{-1} x)} = \sqrt{1 - x^2}$.

$$\text{よって, } \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sin^{-1} x}{\sin(\cos^{-1} x)} dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\frac{1}{2} (\sin^{-1} x)^2 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \boxed{\frac{\pi^2}{32}}.$$

(別法) $\theta = \cos^{-1} x$ とおくと, $\sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \theta$, $dx = -\sin \theta d\theta$ より,

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sin^{-1} x}{\sin(\cos^{-1} x)} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{\sin \theta} (-\sin \theta) d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) d\theta = \left[\frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)^2 \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{\pi^2}{32}}.$$

- 5 (11) 4 次正方行列 A の行ベクトル分割を $A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ とし, A の行列式の値を $|A| = 2$ とする. このとき, 行列式

$$\begin{vmatrix} -c \\ a+2d \\ 5c+d \\ 2a+3b \end{vmatrix} \text{ の値を求めよ.}$$

【答】 行基本変形に関する行列式の性質を用いて,

$$\begin{vmatrix} -c \\ a+2d \\ 5c+d \\ 2a+3b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -c \\ a+2d \\ d \\ 2a+3b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -c \\ a \\ d \\ 2a+3b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -c \\ a \\ d \\ 3b \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} c \\ a \\ d \\ b \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} a \\ d \\ c \\ b \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix} = \boxed{6}.$$

- 6 次の行列に対して, 逆行列の第 3 行の行ベクトルを求めよ

$$(12) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

【答】 行基本変形により,

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{3} - 2 \times \textcircled{1}]{\textcircled{2} - 3 \times \textcircled{1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\textcircled{2} - \textcircled{3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{3} - 3 \times \textcircled{2}]{\textcircled{1} + \textcircled{2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 4 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow[\textcircled{1} + \textcircled{3}]{-1 \times \textcircled{3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -4 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

よって, 逆行列の第 3 行は $\boxed{[3 \quad -1 \quad -4]}$.

$$(13) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

【答】 行基本変形により,

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{4} - \textcircled{1}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow[\textcircled{4} - \textcircled{3}]{\textcircled{1} - 3 \times \textcircled{3}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{2} \leftrightarrow \textcircled{3}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow[\textcircled{4} + \textcircled{3}]{\textcircled{2} - \textcircled{3}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{3} - 2 \times \textcircled{4}]{\textcircled{1} + \textcircled{4}, \textcircled{2} + 2 \times \textcircled{4}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

よって, 逆行列の第 3 行は $\boxed{[2 \quad -1 \quad 2 \quad -2]}$.

7 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 5 & -4 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ とするとき、次の行列式の値を求めよ.

(14) $|A|$

【答】 サラスの公式を使って直接計算してもよいし、次のように行基本変形と余因子展開を用いてもよい:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 5 & -4 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 13 & 0 & 31 \\ 4 & 0 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 13 & 31 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 13 & 31 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{20}.$$

(15) $|A^t B A^{-1}|$

【答】 $|B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 16 & 14 \\ -1 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & 14 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 88$ より,

$$|A^t B A^{-1}| = |A| |^t B| |A^{-1}| = |A| |B| |A|^{-1} = |B| = \boxed{88}.$$

(16) $|-2B^{-1}|$

【答】 $|-2B^{-1}| = (-2)^3 |B|^{-1} = \frac{-8}{88} = \boxed{-\frac{1}{11}}.$

(17) $|C|$

【答】 行基本変形により,

$$\begin{aligned} |C| &= \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -1 & -4 \\ -3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -15 & -11 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -15 & -11 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} -3 & -11 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{25}. \end{aligned}$$

8 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ の余因子行列を $\tilde{A}$ とするとき、次の問いに答えよ.

(18) $\tilde{A}$ の第3行の行ベクトルを求めよ.

【答】 $[|A_{13}| \quad -|A_{23}| \quad |A_{33}|] = \left[\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \right] = \boxed{[1 \quad 5 \quad 3]}.$

(19) 連立1次方程式 $\tilde{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ の解を求めよ.

【答】 等式 $\tilde{A}A = |A|E$ の両辺の (3,3) 成分を比較すると, (18) の結果より,

$$|A| = [|A_{13}| \quad -|A_{23}| \quad |A_{33}|] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 5 \quad 3] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1.$$

よって, $\tilde{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ の両辺に左から A をかけると, $A\tilde{A} = |A|E$ より

$$- \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

したがって, 解は $\boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}.$

9 (20) 行列式 $\begin{vmatrix} 100 & 100 & 100 \\ 100 & 101 & 102 \\ 100^2 & 101^2 & 102^2 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

【答】 ヴァンデルモンドの行列式より,

$$\begin{vmatrix} 100 & 100 & 100 \\ 100 & 101 & 102 \\ 100^2 & 101^2 & 102^2 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 100 & 101 & 102 \\ 100^2 & 101^2 & 102^2 \end{vmatrix} = 100(102 - 101)(102 - 100)(101 - 100) = \boxed{200}.$$